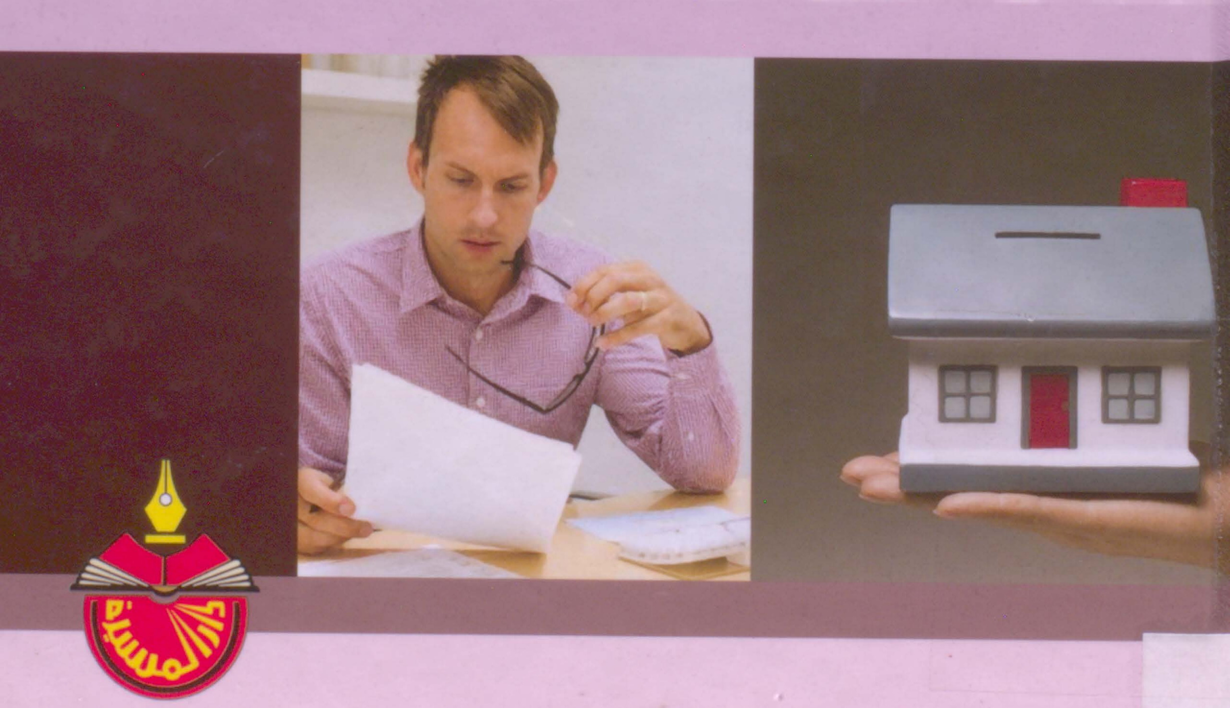
مقدمة في
بحوث العمليات

الأستاذ الدكتور
محمد الطراونة
نائب رئيس الأكاديمية العربية للعلوم المالية والمصرفية

الأستاذ الدكتور
سليمان عبيدات
كلية الاقتصاد والعلوم الادارية
الجامعة الاردنية



رقـــم التصنيـــف : 658,403
المؤلف ومن هو في حكمه: محمد احمد الطراونة، سليمان خالد عبيدات
عنـــوان الكتـــاب: مقدمة في بحوث العمليات
رقـــم الايـــداع : 2008/4/1184
الــواصفـــــــات: /بحوث العمليات//ادارة الأعمال//اتخاذ القرارات//نظرية المعلومات/
بيـانـــات النـشر : عمان - دار المسيرة للنشر والتوزيع
* - تم اعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى
2009 م - 1429 هـ

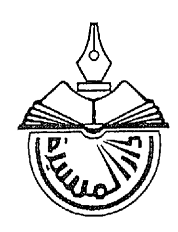


عـمـان-العـبـدلي-مـقـابل البنك العـربي
هـاتـف:5627049 فـاكـس:5627059
عمان-ساحة الجامع الحسيني-سوق البتراء
هـاتـف:4640950 فـاكـس:4617640
ص.ب 7218 - عـمـان 11118 الأردن
www.massira.jo

مقدمة في
بحوث العمليات

الأستاذ الدكتور
محمد الطراونة
نائب رئيس الأكاديمية العربية للعلوم المالية والمصرفية

الأستاذ الدكتور
سليمان عبيدات
كلية الاقتصاد والعلوم الادارية
الجامعة الاردنية



الإهداء

إلى زوجاتنا وأبنائنا

المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

إن التقدم المتسارع الذي يشهده العالم في كافة المجالات وتزايد أعداد السكان وتناقص الموارد هي أمور تستدعي الانتباه، فإذا كان لأي أمة من الأمم أن تحلق بالسباق في مجالات العلوم المختلفة فإنه لا بد لها من وضع الأسس السليمة لمسيرتها الشاملة وإدخال ما يلزم من تحديث وتطوير بما يتفق وحاجاتها وطموحاتها.

وتعتبر بحوث العمليات من أهم وأحدث الموضوعات التي يساعد الإلمام بها وتطبيقها في رسم السياسات ووضع الخطط بما يتفق والأهداف مع ضمان الاستخدام الأمثل للطاقات والإمكانات.

إن الحاجة للتخطيط العلمي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية والسياسية دفعت المؤسسات التعليمية إلى وضع هذه المادة في مقدمة مناهجها. وذلك حتى تتمكن من الربط بين ما تقدمه وما تحتاجه مجتمعاتها المحلية، ولا أدل على ذلك من اتساع انتشار تعليم هذه المادة الهامة في الدول النامية بشكل عام.

وانطلاقاً من شعورنا بأهمية هذا الموضوع وكذلك الشعور بحاجة المكتبة العربية إلى المزيد من المؤلفات في هذا المجال، فلقد توكلنا على الله بتقديم هذا الجهد المتسم بالبساطة والشمولية في إطار الموضوعات التي تمت تغطيتها في هذا الكتاب.

سائلين الباري جل وعلى أن يوفقنا في هذا الطريق ولما فيه الخير والنفع لكافة المهتمين.

والله ولي التوفيق

عمان

المؤلفان



الباب الأول

بحوث العمليات واتخاذ القرارات



الفصل الأول

ماهية بحوث العمليات

1-1 تعريف بحوث العمليات Definition of Operations Research (OR)

إنه ليس من الصعب استنتاج التعريف من المصطلح نفسه والذي يعني القيام بالبحوث والدراسات التي تسهل علينا مهمة القيام بأعمالنا على أفضل وجه في ظل الظروف السائدة والمعطيات المتاحة، وهذا يعني اتخاذ القرارات بطرق مدروسة وعلى أساس علمي. ومن هنا نستطيع القول بأن بحوث العمليات تعنى باستخدام الأساليب العملية في اتخاذ القرارات.

2-1 التطور التاريخي لبحوث العمليات Its Historical Development

إن عملية اتخاذ القرارات هي عملية ملازمة للإنسان منذ أول نشأته، كيف يعيش، أين يعيش، وكيف يحمي نفسه، كلها أمور تحتاج إلى دراسة تتناسب أساليبها وأبعادها مع طبيعة المشكلة والإمكانات المتوفرة لمواجهتها. من هنا نرى أن الأفراد يتخذون قراراتهم معتمدين على قدراتهم وخبراتهم وظروفهم الشخصية، والبيئة التي يعيشون فيها والتي تشكل بحد ذاتها تعقيداً لهذه العملية إضافة للصعوبة المتمثلة بعدم توفر أسس عملية ثابتة ومتعارف عليها لهذه العملية. إلا أنه ونتيجة لازدياد حجم المشاكل وتداخلها كان لا بد من البحث عن أساليب أكثر ملاءمة وفعالية لمواجهتها.

وبما أنه يصعب تحديد فترة معينة كنقطة بداية لتطبيق مفاهيم بحوث العمليات. إلا أننا ومن خلال استعراض تطور مفهوم الإدارة بشكل عام، نستطيع أن نرى بأن هناك فترات بدأت تتميز بها هذه المفاهيم أكثر من غيرها كفترة الثورة الصناعية مثلاً. وفي نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين كان هناك مجموعة من الأعمال التي يمكن اعتبارها بأنها كانت ثورة علمية في ذلك الوقت، فالإدارة العلمية Scientific Management لفردريك تايلور F.W.Taylor كانت بداية ما يسمى بالهندسة الصناعية. هذا إضافة إلى أعمال أخرى اعتمدت على الأساليب الرياضية ومنها: أعمال ارلانج Erlang

في نظرية الصفوف، أديسون Edison في نظرية الألعاب وهارس Harris في نظم المخزون Economic Order Quantity (EOQ)[(1)].

وبالرغم من كل ذلك فإن بحوث العمليات لم تظهر كحقل علمي مستقل إلا مع بداية الحرب العالمية الثانية في كل من المملكة المتحدة والولايات المتحدة، حيث تأسست هناك بعض فرق العمل المعنية بزيادة فعالية العمليات العسكرية في ظل الموارد المتناقصة.

وبعد نهاية الحرب بدأت بعض الصناعات بالاستفادة من هذه الأساليب في زيادة انتاجيتها وربحيتها عن طريق الاستغلال الأفضل لمواردها. وفي مرحلة لاحقة ومتصلة بما سبقها بدأت جوانب هذا الحقل العلمي تتطور تناسباً مع الاحتياجات المتزايدة كماً ونوعاً وذلك في المجالات الاقتصادية والاجتماعية والسياسية وغيرها. وقد ساعد على ذلك التقدم الفني المتمثل بانتشار استخدام أجهزة الكمبيوتر (الحاسب الآلي) والتطورات المستمرة والمذهلة في مجالات البرمجة.

من هنا نرى أن بحوث العمليات كانت وما زالت حقيقة ملازمة للتقدم العلمي والصناعي. ومن الأدلة على ذلك أن معظم أو جميع الدول النامية بدأت تركز على هذا الجانب العلمي وتدرجه في الخطط والمناهج التدريسية في جامعاتها ومعاهدها وربما مدارسها أيضاً. وبالرغم من أنه لا شك في قدرة وفعالية أساليب بحوث العمليات في صنع القرارات المختلفة، فإن السؤال الذي قد يتبادر إلى الذهن هنا هل نستطيع تطبيقها في كافة المجالات وبنفس الفعالية بغض النظر عن طبيعة المشكلة؟ فالجواب على هذا السؤال يعتمد على طبيعة المشكلة. فإذا كانت جوانب المشكلة التي ندرسها جميعها رقمية، فإننا نقوم بتطبيق المناسب من الأساليب الكمية لاتخاذ قرار بشأنها. أما إذا كان للمشكلة جوانب كمية وأخرى نوعية فإننا نقوم بعملية اتخاذ القرار المناسب بشأنها على مرحلتين، المرحلة الأولى تعتمد على دراسة إمكانية تحويل الجوانب النوعية إلى كمية ومن ثم وضع الحلول المناسبة لها. أما المرحلة الثانية فيتم استخدامها في حال تعذر تحويل الجوانب النوعية إلى كمية، وهنا نقوم بتحديد الجوانب الكمية وتطبيق ما هو مناسب لها وكذلك الجوانب النوعية وتطبيق ما يناسبها أيضاً من الأساليب لمواجهة مثل هذه الحالات ومن ثم نتخذ القرار النهائي بشأنها.

(1) H.M. Wanger, Principles of Operations Research. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

من هنا نرى أنه يتوجب علينا توضيح بعض هذه المفاهيم الكمية والنوعية من خلال مقارنة موجزة تعتمد على استعراض خطوات اتخاذ القرارات بشكل عام.

3-1 خطوات اتخاذ القرارات

إن عملية اتخاذ القرارات ومهما كانت طبيعة هذه القرارات، تمر بعدد من المراحل التي لا بد من اتباعها إذا أردنا أن يكون القرار المتخذ سليماً. وتتلخص هذه الخطوات بما يلي:

1- تحديد المشكلة أو الهدف Problem Definition or Goal Formulation

فتأسيس صناعة جديدة أو إلغاء أخرى قائمة وتحديد مجالات استثمار رؤوس أموالنا، واختيار موقع لصناعتنا أو منزلنا، ودخول أو عدم دخول أسواق معينة، ومواصلة أو عدم مواصلة دراستنا بعد مرحلة معينة، وارتداء ملابسنا في الصباح وغيرها كثير تعتبر أمثلة على مشاكل نريد حلها أو أهداف نريد تحقيقها.

وهنا لا بد من مراعاة النظرة الشمولية وذلك بحصر جميع جوانب المشكلة ومراعاة واقعية أهدافها في ظل إمكاناتنا وظروفنا حتى نضمن الحلول الأفضل أو المناسبة لها.

2- تحديد المعلومات اللازمة ومصادر الحصول عليها:

Determination and Collection of Information

فبعد تحديد المشكلة أو الهدف نقوم بتحديد المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب، فمثلاً لو كنا نفكر بإقامة صناعة جديدة أو إعادة تقييم صناعة قائمة، فإن من أمثلة المعلومات الضرورية لمعالجة مثل هذه المشكلة تحديد حجم وطاقة الصناعات القائمة. تحديد حجم الأسواق المحلية والخارجية، وإمكانيات ووسائل التنافس.... وغيرها.

وبعد تحديد طبيعة المعلومات، نقوم بتحديد مصادر الحصول عليها، ومن بين المصادر الممكنة للحصول على معلومات مثلاً، الخبرة الشخصية، خبرة الجهات الأخرى، القيام بالدراسات والبحوث، أو الاستعانة بآراء بعض الجهات المتخصصة.

3- تحديد البدائل Determination of Alternatives

فبعد أن نقوم بحصر جميع جوانب المشكلة أو الهدف، نقوم بتحديد الوسائل التي قد تساعد في الوصول إلى ما نريد، وفي هذه المرحلة أيضاً لا بد من وضع أكبر قدر ممكن من البدائل حتى يتسنى لنا القيام بدراسة علمية شاملة، حيث أن بعض البدائل التي قد تبدو لنا بأنها ليست مناسبة للوهلة الأولى، قد تكون هي المناسبة بعد إجراء التحليل لها،

وحتى لو لم تكن مناسبة إلا أننا قد نحتاج إلى تطبيقها تحت ظروف معينة وهذا يسهل علينا وضع خطط واستراتيجيات لمواجهة الظروف المتغيرة.

4- تحديد ووضع النموذج المناسب Model Development

من أجل المفاضلة بين البدائل التي تم تحديدها في الخطوة السابقة، نقوم بوضع النموذج المناسب والذي يسهل علينا مهمة القيام بهذه العملية، ومن بين العوامل الواجب مراعاتها هنا، الهدف أو المشكلة موضع البحث، المعلومات والإمكانيات المتوفرة وغيرها، وكما ذكرنا سابقاً فإن أساليب بحوث العمليات قد تطورت وأصبحت على درجة من التفرغ والتعقيد بحيث أنه يمكن استعمالها لمعالجة معظم إن لم يكن كافة المشاكل الإدارية، وتكمن المشكلة هنا في اختيار وتطبيق الأسلوب المناسب، وهنا تبرز أهمية الخبرة والاختصاص لضمان الاستفادة من كافة مجالات هذا الحقل العلمي الهام.

5- تحليل وتقييم هذه البدائل Evaluation of Alternatives

ويجب أن تتم هذه العملية في ظل المشكلة أو الهدف، وإمكاناتنا الحالية والمستقبلية ودراسة الظروف التي تواجهنا أو قد تواجهنا، وذلك حتى نتمكن من وضع الأولويات لهذه البدائل Priority Determination بما يتفق مع الواقع ومع ما قد يحدث من تغييرات لا نستطيع التحكم بها.

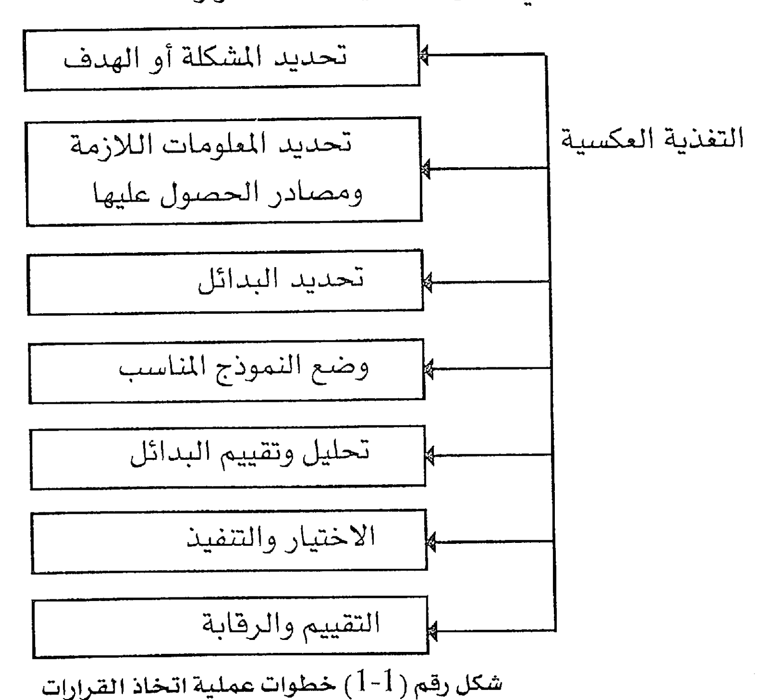
6- الاختيار والتنفيذ Choice and Implementation

وتعتمد هذه على قرارنا في الخطوة السابقة حيث نقوم باختيار البدائل الأفضل ومن ثم اتخاذ الإجراءات اللازمة من أجل تنفيذها. وتعتمد عملية التنفيذ هذه على طبيعة المشكلة أو الهدف. فقد تكون هذه العملية نهائية يحتاج تعديلها أو الرجوع عنها إلى وقت وتكاليف مرتفعين، أو قد تأخذ شكل دراسات أولية قبل الشروع في عملية التنفيذ النهائية، فاختيار موقع لمشروع وإقامة البناء عليه يمثل قراراً نهائياً. أما وضع تصميم لأحد المنتجات واختياره فنياً وتسويقياً قبل الشروع في إنتاجه على نطاق أوسع لا يمثل قراراً نهائياً ما دام أن هناك درجة من المرونة للقيام بالدراسات اللازمة قبل أن نتخذ قراراً نهائياً بشأنه، من هنا نرى أن الخطوات السابقة لهذه الخطوة يجب أن تتم بدقة متناهية وذلك ضماناً لسلامة التنفيذ.

7- التقييم والرقابة Evaluation and Control

وهنا نقوم بمقارنة الأهداف التي نسعى لتحقيقها أو المعايير التي وضعت لتمثيل تلك الأهداف بالنتائج التي حصلنا عليها، وفي حال وجود انحرافات بين المعايير والنتائج نقوم بدراسة أسبابها ومعالجتها ضمن الخطوات السابقة، فقد تكون مشكلة مثلاً في تحديد الأهداف، أو تحديد البدائل أو غيرها. وحتى في حال عدم وجود انحرافات فإننا نقوم بإتباع نفس الخطوات إذا غيرنا أهدافنا. أي أن عملية اتخاذ القرارات هذه يجب أن تكون عملية إدارية مستمرة ومتكاملة من خلال ما يسمى بالتغذية العكسية Feed back التي تزودنا بمؤشرات عن سلامة التنفيذ أو ضرورة التغيير.

ويمثل الشكل التالي خطوات عملية اتخاذ القرارات

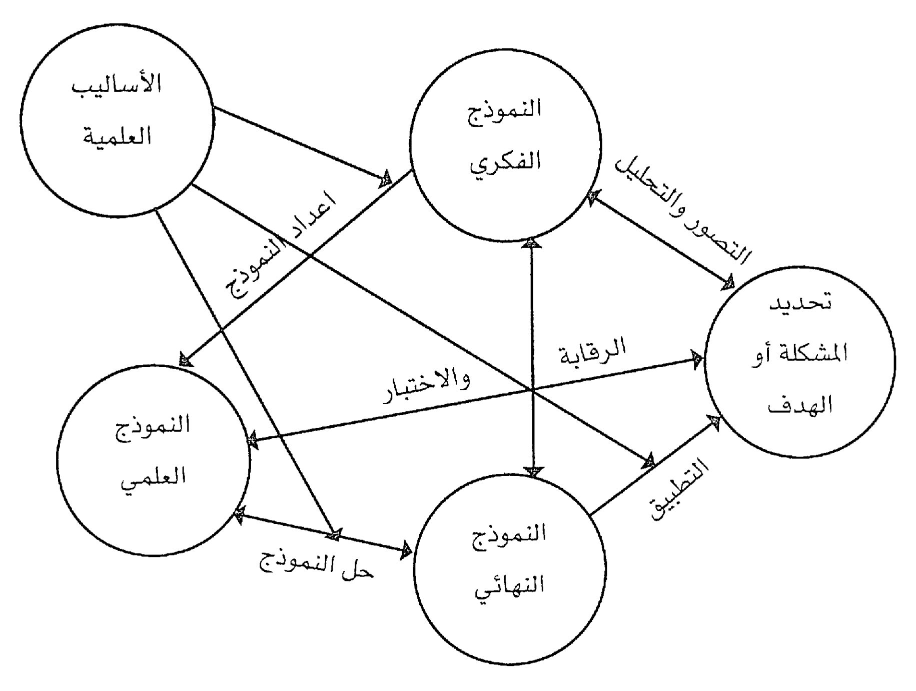


شكل رقم (1-1) خطوات عملية اتخاذ القرارات

4-1 اتخاذ القرارات وبحوث العمليات:

إن خطوات اتخاذ القرارات حسب مفهوم بحوث العمليات تتبع ما يسمى بالنموذج العلمي Scientific Paradigm والذي يتمثل بالشكل التالي:(1)

(1) Sagasti and Mitroff, O.F. From the Viewpoint of general system theory. Omega, The Int.JL of Mgmt. Sci., vol I. No. 6.1973.



شكل رقم 1-2: خطوات إعداد النموذج العلمي

فبناء على هذا الرسم التوضيحي لخطوات إعداد النموذج العلمي يمكن تلخيص هذه الخطوات كما يلي:

1- تحديد المشكلة أو الهدف ضمن واقع معين أي ضمن افتراضات محددة تتناسب وطبيعتها أو مع رغبة متخذ القرار.

2- وضع نموذج فكري أو تصور لكافة أبعاد المشكلة، أي أن الدراسة هنا تعتمد على الخبرة والاختصاص والقدرة على التفكير العلمي المنظم الذي يسهل علينا إعداد النموذج أو النماذج المناسبة لتحقيق الهدف الذي نريد.

3- حل واختيار النموذج العلمي تمهيداً لوضع النموذج النهائي.

4- وضع وتطبيق النموذج النهائي.

5- الرقابة والاختبار وذلك للتأكد من أن النموذج المقترح يحقق الهدف الذي نريد وكذلك إمكانية الاستفادة منه لمواجهة حالات أخرى. وتسمى عملية الاختبار لمواجهة الهدف الحالي. أي الاختبار على مستوى محدود Internal Validation أما عملية تعميم نتائج هذا النموذج لتطبيقها في حالات أخرة فتسمى External Validation.

ومن الأمثلة على إتباع النموذج العلمي في اتخاذ القرارات، عملية اختبار الفرضيات Hypotheses Testing كأحد الأساليب الإحصائية الواسعة الإنتشار. وبموجب هذه العملية نقوم بتحديد الهدف والذي يتعلق بدراسة ظاهرة معينة، ومن ثم نقوم بالملاحظة وتجميع المعلومات عن هذه الظاهرة، وبعدها نقوم بعملية التحليل والتي قد ينتج عنها قبول أو رفض هذه الفرضيات. وعندما تكون النتائج ثابتة ومتكررة بحيث يمكن تعميمها ننتقل من الفرضية إلى النظرية Theory.

ومن المآخذ التي قد تثار ضد النموذج العلمي بخطواته السالفة الذكر هو أننا نقوم بحصر المشكلة ودراستها ضمن افتراضات محددة تتفق والأساليب العلمية المتوفرة. إلا أن ما يخفف من حدة هذه المآخذ هو أن التقدم العلمي قد ساهم في وضع العديد من النماذج التي قد تصلح لحل المشاكل حتى لو تغيرت الافتراضات المبنية عليها. فقوانين الاحتمالات، والبرمجة الخطية ونظم المخزون وغيرها خير دليل على ذلك.

وبالرغم من التوسع في استعمال النماذج العلمية إلا أن هناك بعض المشاكل التي قد يصعب حلها باستخدام هذه الأساليب لوحدها. لذلك كان لا بد من التفكير بأساليب أخرى أكثر شمولية. وتعتمد هذه الأساليب على مبادئ نظرية النظم System theory. وتعتمد هذه على المشاكل بكافة أبعادها الداخلية والخارجية دون حصرها في إطار الافتراضات والنماذج السائدة، ومن أهم الأمثلة على هذه الطرق كوسائل لاتخاذ القرارات.

1- طريقة مجموعات الخبراء Method of Expert System (Delphi).

2- طريقة المناظرة والحوار Dialectical Approach.

3- التقليد والمحاكاة بواسطة الكمبيوتر Simulation.

ومن أهم هذه: طريقة فوستر الديناميكية Fosters Dynamo.

طريقة مونت كارلو Monte-Carlo Simulation.

وبما أن هذا الكتاب يتعلق بالأساليب فإننا سوف لا نتوسع في شرح هذه الطرق، وإنما تترك للمعالجة في كتب أخرى.

5-1 نظرية النظم واتخاذ القرارات:

إن خطوات اتخاذ القرارات بإتباع مبادئ نظرية النظم لا تختلف عن الطريقتين

السابقتين (العامة وبحوث العمليات) إلا في شموليتها وواقعيتها[1] . ويرجع السبب في ذلك هو أننا عندما نقوم باتخاذ القرار ندرس كافة الإمكانيات في ظل المتغيرات الداخلية والخارجية ومستخدمين ما نستطيع من نظريات ونظم المعرفة Inquiring System دون الاقتصار فقط على نماذج وافتراضات معينة، حيث أننا بموجب هذه النظرية نعتبر أن كل مشكلة أو نظام هي مشكلة أو نظام فرعي من شيء أكثر اتساعاً. وضمن هذا التدرج نستطيع اتخاذ قراراتنا التي وإن كانت واقعية إلا أنها لا يمكن أن تكون أكثر دقة نظراً لاتساع حجمها.

ويعتمد اختيار هذه الطريقة دون غيرها على طبيعة المشكلة، وتوفر المعلومات والخبرات، والقدرة على القيام بالدراسات، وتوفر المال والوقت اللازمين، وكذلك على مصلحة أو رغبة متخذ القرار.

ويمكن تلخيص الفروق بين أساليب بحوث العمليات ونظرية النظم بالنواحي التالية:

جدول رقم 1-1

المقارنة بين بحوث العمليات ونظرية النظم

بحوث العمليات	نظرية النظم
1 - التعامل مع الأنظمة على أساس أنها مغلقة ولا تتصل بمحيطها الخارجي.	1- التعامل مع الأنظمة المفتوحة والمتصلة بمحيطها الخارجي.
2- النظرة الجزئية، حيث يمكن التعامل مع المكونات كل بمفرده.	2- النظرة الشمولية وعدم القدرة على التجزئة.
3- الكل يساوي مجموع الأجزاء المكونة له.	3- الكل قد يكون أقل أو أكثر من حاصل جمع مكوناته.
4- البساطة المنظمة نتيجة التعامل مع أشياء محددة التي ما أن تجاوزت حداً معيناً حتى تنتقل إلى مرحلة الصعوبة الشائكة وغير المنظمة.	4- الصعوبة المنظمة والناتجة عن الشمولية المبينة على أساس الواقع الذي ندرس.
5- الوصول إلى النتائج عن طريق الاشتقاق الرياضي.	5- الوصول إلى النتائج عن طريق الآراء والأحكام الشخصية.
6- دقة النتائج.	6- تقريب النتائج.

(1) John P. Van Gighe. Applied General System Theory. Harper and Row Inc.1978.

7- تحديد الوسائل التي قد تؤدي إلى نتائج معينة تتفق ورغباتنا.	7- الاهتمام بتغيير ما هو كائن إلى ما يجب أن يكون.
8- الاستدلال على المستقبل من خلال تقييم وتحليل الماضي والحاضر.	8- النظر إلى المستقبل في ظل الظروف المتغيرة حيث أن العلاقة الخطية والثابتة بين الماضي والمستقبل قليلة الحدوث في الحياة الواقعية.
9- التخطيط قصير أو متوسط المدى.	9- التخطيط طويل المدى.
10- التركيز على جانب واحد أو عدد قليل من الجوانب.	10- التركيز على جوانب متعددة بنفس الوقت وذلك نتيجة أخذ العوامل المحيطة بعين الاعتبار عند اتخاذ أي قرار.
11- تستخدم في تحديد الأساليب والإجراءات.	11- تستخدم في وضع الاستراتيجيات.

وبالرغم من ذلك فإن المختصين والعاملين في حقول بحوث العمليات يحاولون تطبيق المفاهيم الشاملة عند القيام بدراستها ووضع النماذج المناسبة لها، هذا إضافة إلى أن الخبراء في مجال نظرية النظم يقومون بتطبيق الأساليب الكمية عند القيام بأي تحليل أو دراسة. فالنظرة الشمولية وحدها لا تكفي لحل المشاكل إذا لم تتمكن من تحديد أجزاء المشكلة ووضع الحلول المناسبة لها في سبيل الوصول إلى حل نسبي وبالرغم من أن هذا الحل قد لا يكون كامل الدقة إلا أنه أفضل من عدم وجود حل على الإطلاق.

6-1 مجالات استخدام بحوث العمليات:

يمكن تلخيص أهم المجالات الإدارية لاستخدام بحوث العمليات في المشاريع الصناعية والتجارية والزراعية والخدمية سواء كانت هذه ربحية أو غير ربحية، وعلى سبيل المثال لا الحصر بما يلي:

1- الإنتاج وتشمل:

- دراسات الجدوى.
- تحديد المدخلات اللازمة للعمليات الإنتاجية.
- تحديد نماذج المنتجات.
- اختيار موقع المشروع.
- التصميم الداخلي للمصنع.

- تخطيط العمليات الإنتاجية.
- ضبط ورقابة الجودة.
- الصيانة.
- قياس ورفع الكفاءة والإنتاجية.

2- التسويق والمبيعات:

- بحوث التسويق.
- وضع الأسعار.
- الدعاية والإعلان.
- رسم السياسات التسويقية.
- تحديد الأسواق.
- سياسات التوزيع.

3- التمويل وما يتعلق به من تحديد مصادر الحصول على الأموال وتخطيط وتوجيه الاستثمارات.

4- الأفراد وما يرتبط بذلك من سياسات تحديد الاحتياجات والتعيين والتدريب وأنظمة الحفز والتشجيع.

5- المشتريات والمخازن من حيث تحديد مصادر الشراء وكميات وأسعار المواد المشتراة وأوقات الحصول عليها ووضع نظم سليمة للمخزون مما يؤدي إلى زيادة الربحية وخفض التكاليف.

6- الرقابة الإدارية حيث أن وضوح وتحديد الأهداف بشكل علمي ومدروس يسهل من مهمة الرقابة وبالتالي زيادة الفعالية.

كل هذا إضافة إلى مجالات أخرى أكثر اتساعاً كالتخطيط القومي الشامل والمتمثل بخطط التنمية الاقتصادية والاجتماعية التي تضعها معظم الدول وكذلك بعض القرارات ذات الصبغة السياسية والعسكرية.

من هنا نرى أنه يمكن الاستفادة من أساليب بحوث العمليات في كافة المفاهيم والمبادئ الإدارية ابتداء من التخطيط وانتهاء بالرقابة والتقييم وذلك بغض النظر عن حجم المؤسسة صانعة القرار.

أسئلة

1- ما هي بحوث العمليات؟

2- ما هي أهم استخداماتها؟

3- وضح طبيعة العلاقة بين التطور التاريخي لمفهوم بحوث العمليات وعلم الإدارة بشكل عام.

4- ما هي خطوات اتخاذ القرارات؟ وضح إجابتك بمثال.

5- وضح خطوات إعداد النموذج العلمي مع الرسم.

6- ما هي نظرية النظم ولماذا سميت بهذا الإسم؟

7- ما هي بتصوركم خطوات اتخاذ القرارات حسب مفاهيم النظم؟ وضح بالرسم إذا أمكن.

8- ما هي أهم أوجه الشبه والاختلاف بين أساليب بحوث العمليات ونظرية النظم؟

9- أيها تفضل عند اتخاذ أي قرار؟ بحوث العمليات أم نظرية النظم ولماذا؟

10- هل تعتقد بأن بحوث العمليات ونظرية النظم يمكن أن يكمل كل منهما الآخر أم لا ولماذا؟ وضح رأيك بمثال.

الفصل الثاني

نظرية القرارات

Decision Theory

1-2 تعريف نظرية القرارات:

تعتبر عملية اتخاذ القرارات من الواجبات الرئيسية للإدارة، فالإدارة تواجه وبشكل مستمر مشاكل تحتاج إلى اتخاذ قرارات معينة من أجل حلها، وقد تكون هذه القرارات دورية كقرارات التخطيط والرقابة أم غير دورية كتلك المتعلقة بالأعمال اليومية وما قد يرتبط بها من تغييرات.

ولنجاح الإدارة في مهامها فإنه يتوجب عليها الالتزام بتطبيق كافة خطوات اتخاذ القرارات بشكل علمي ودقيق، وهذا يسهل عليها عمليات التخطيط والتنفيذ والرقابة وكذلك مواجهة الحالات الطارئة واستغلال الفرص المتاحة بشكل يتناسب مع أهداف الجهة متخذة القرار.

* ونظرية القرارات عبارة عن مدخل تحليلي متناسق لدراسة عملية اتخاذ القرارات ووضع نموذج للاختيار الرشيد والأفضل وفقاً لمعايير وأهداف محددة.

2-2 أنواع القرارات:

يمكن تصنيف القرارات حسب عدد من الاعتبارات من أهمها:

1- مضمون القرارات.

2- طريقة اتخاذ القرارات.

3- نتائج القرارات.

فحسب المضمون يمكن أن نصنف القرارات إلى اقتصادية واجتماعية وسياسية وإدارية وعسكرية، أو غيرها حسب طبيعة المشكلة التي يعالجها ذلك القرار، ويعتبر هذا النوع من التصنيف تصنيفاً عاماً حيث أن بعض القرارات يمكن أن تشتمل على أكثر من جانب بنفس الوقت وبشكل يصعب معه إدراجها تحت تصنيف معين، وغالبا ما يحدث هذا النوع من التداخل عند رسم السياسات العامة سواء لمؤسسات القطاع العام أو الخاص.

أما تصنيف القرارات حسب طريقة اتخاذها فيمكن تلخيصها بما يلي:

1- قرارات فردية.

2- قرارات جماعية.

ومن خصاص القرارات الفردية:

أ- وجود متخذ واحد للقرار.

ب- وجود هدف واحد وحتى لو كانت متعددة فإنها تعامل على أساس أنها هدف واحد ما دام إنها تخدم بالنهاية مصلحة واحدة.

ج-محاولة التحقيق الأمثل للأهداف (Optimization)

أما القرارات الجماعية فمن أهم خصائصها:

أ- وجود أكثر من متخذ واحد للقرار حيث أن القرار يتخذ من قبل مجموعة من الأفراد.

ب- وجود أكثر من هدف إلا أن مجموعة الأهداف هذه يجب أن تعامل على أساس أنها أهداف فرعية تكون في مجموعها الهدف العام.

ج- صعوبة التحقيق الأمثل للأهداف الفرعية حتى وإن كان هناك تحقيق أمثل للهدف العام، ويرجع السبب في ذلك إلى تضارب مصالح متخذي القرار مما يستلزم تقديم بعض بعض التنازلات من قبل بعض أو جميع أفراد المجموعة في سبيل الوصول إلى الهدف العام وتسمى هذه العملية .(Sub-Optimization)

ومن الأمثلة على ذلك ما يحدث عند وضع بنود وتوزيع الموازنة العامة للدولة أو إحدى مؤسساتها أو مؤسسات القطاع الخاص فلو تخيلنا مثلاً مؤسسة صناعية بإدارتها كالإنتاج، التسويق، المالية، المشتريات، الأفراد وغيرها، فإننا نلاحظ أن الأهداف الخاصة لكل من هذه الإدارات قد تتعارض فيما بينها إلا أنها جميعاً يجب أن تتم على مستوى من التنسيق والتكامل بشكل يضمن تحقيق الهدف العام لتلك المؤسسة.

ومن حيث النتائج فيمكن تقسيم القرارات حسب تحقيقها إلى الأهداف التي اتخذت من أجلها فإذا كانت النتائج مطابقة للأهداف، تصنف هذه القرارات بأنها رشيدة أو جيدة أما إذا كانت النتائج ليست مطابقة للأهداف فتعتبر هذه قرارات غير جيدة، وتختلف درجة جودة القرارات أو عدمها بمدى تطابقها مع أو انحرافها عن أهدافها.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن هناك ارتباط نسبي بين طرق اتخاذ القرارات ونتائجها، فالقرارات المدروسة بشكل جيد غالباً ما تؤدي إلى نتائج جيدة وعكس ذلك صحيح ونتيجة صعوبة التحكم بكافة الظروف والعوامل المحيطة، فقد يحدث أن تكون طريقة اتخاذ القرار جيدة ولكن نتائجه ليست بالمستوى المطلوب أو العكس.

ولكن هذا لا ينفي القاعدة الأساسية والتي تربط بين طرق اتخاذ القرارات ونتائجها، وهذا يؤكد لنا ضرورة الالتزام بالطرق السليمة لاتخاذ القرارات.

3-2 تحليل القرارات Decision Analysis

إن عملية تحليل القرارات تتطلب وضعها بشكل معين يسهل عملية تحليلها. ويعتمد اختيار الشكل المناسب لصياغة أو تمثيل القرار على طبيعة القرار وحجمه ومدى توفر المعلومات اللازمة لإتخاذه. ومن أهم الأساليب المستخدمة بهذا المجال:

1- مصفوفة القرارات Decision Matrix

2- شجرة القرارات Decision Tree

مصفوفة القرارات:

تتكون مصفوفة القرارات غالباً من أربعة أجزاء رئيسية هي:

أ- حالات الطبيعة- البيئة-(States of Nature): وتمثل هذه الظروف المختلفة التي قد يواجهها متخذ القرار والتي ولا شك يكون لها دور في اتخاذ قرار دون غيره.

ب- البدائل (Alternatives): وعي عبارة عن مجموعة الطرق التي يمكن بواسطتها تحقيق هدف أو أهداف متخذ القرار. وبعد المفاضلة فيما بينها قد يختار أحدها أو مجموعة منها.

ج- النتائج (Payoffs): ويمكن تعريفها بأنها المردودات أو التكاليف أو المنفعة الناتجة عن كل من البدائل تحت كل حالة من حالات الطبيعة.

د- الاحتمالات (Probabilities): وهي نسب التوقعات المعطاة لحدوث كل من حالات الطبيعة، ويمكن تحديد هذه الاحتمالات بناء على خبرتنا أو خبرة غيرنا السابقة، أو من خلال البحوث والدراسات التي تقوم بها جهات متخصصة أو بناء على تقديرات متخذ القرار المجردة.

وتتخذ مصفوفة القرارات الشكل التالي:

جدول 2-1: نموذج مصفوفة القرارات

	ح1	ح2	ح3	ح4
حالات الطبيعة / البدائل	ط1	ط2	ط3	ط4
ب1	ن11	ن21	ن31	ن41
ب2	ن12	ن22	ن32	ن42
ب3	ن13	ن23	ن33	ن43

ط= حالات الطبيعة   ن= النتائج

ب- البدائل   ح= الاحتمالات

فمثلاً ط1 تعني حالة الطبيعة الأولى ،ح1 تعني احتمال حدوث حالة الطبيعة هذه ، ب1 تعني البديل الأول، ون12 هي نتيجة البديل الثاني تحت حالة الطبيعة الأولى، وهكذا.

4-2 حالات أو ظروف اتخاذ القرارات:

هناك أربع حالات رئيسية يتم في ظلها اتخاذ القرارات، وتعتمد هذه احالات على توفر أو عدم توفر احتمالات حدوث حالات الطبيعة، وهذه الحالات هي:

1- حالة التأكد (Certainty).

2- حالة عدم التأكد (Uncertainty).

3- حالة المخاطرة.(Risk).

1- حالة التأكد:

تسمى هذه الحالة بحالة التأكد لأن متخذ القرار يكون متأكداً من نتائج قراره، وهذا يعني أن احتمال حصوله على النتائج هو واحد صحيح أي 100% وبناءاً على ذلك فإنه لا يوجد أكثر من حالة طبيعية واحدة أي أن مصفوفة القرارات في هذه الحالة تتكون من عمود واحد ومجموعة من البدائل يتم الاختيار من بينها. وتتخذ مصفوفة القرارات المشتملة على ثلاثة بدائل وفي حالة التأكد الشكل التالي:

البدائل / حالات الطبيعة	ط1
ب1	ن11
ب2	ن12
ب3	ن13

مثال (1): إذا كان أحد المستثمرين يرغب باختيار البديل أو البدائل المناسبة لاستثمار أمواله وفق المعطيات التالية على افتراض أن النتائج مؤكدة.

مجال الاستثمار	نسبة العائد
سندات	%10
أسهم	%8.5
ودائع بنكية	%7

فإنه ولا شك سوف يستثمر أمواله في السندات لأنها تحقق له أعلى عائد ممكن وهو %10 . فمجالات الاستثمار هنا تمثل البدائل. ونسب العائد تمثل النتائج ولا يوجد إلا حالة طبيعية واحدة مؤكدة الحدوث.

مثال (2): إذا كنت ترغب بالسفر إلى منطقة ما وكان أمامك ثلاثة بدائل أو وسال نقل وبالتكاليف التالية:

وسيلة النقل	التكلفة
الطائرة	50 دينار
السيارة	25 دينار
القطار	17 دينار

فإن وسيلة النقل التي تختار بناءً على التكاليف هي القطار لأنه يمثل أفضل النتائج أي أقل التكاليف.

2- حالة عدم التأكد:

وبموجب هذه الطريقة فإن احتمالات حالات الطبيعة تكون غير متوفرة، وذلك إما لعدم

الخبرة، أو صعوبة الحصول على الاحتمالات، أو لأن القرار جديد من نوعه، لذلك فإن مصفوفة القرار هنا تتكون من ثلاثة أجزاء هي : حالات الطبيعة والبدائل والنتائج، وأهم الطرق أو المعايير المستعملة لاتخاذ القرارات في مثل هذه الحالات هي:

أ- الاحتمالات المتساوية لحالات الطبيعة أو لابلاس(Insufficient reason (Laplace.

ب- معيار التفاؤل (Optimism Criterion (Maximax.

ج- معيار التشاؤم .(Pessimism Criterion (Maximin

د- طريقة المعاملات "المعيار الواقعي"Criterion of Realism. أو المعدل الموزون Weighted Average.

هـ- ويرجع تفضيل استخدام إحدى هذه الطرق دون غيرها إلى رغبة أو مصلحة الشخص أو الجهة متخذة القرار. وهذا يعني أنه لا يوجد حتى الآن أي تبرير علمي لتفضيل إحداها دون غيرها.

مثال (3): لو كان لدينا مصفوفة القرارات التالية والتي تمثل مردودات الاستثمار في ثلاث من المجالات هي السندات والأسهم والودائع تحت ثلاث من حالات الطبيعة أو الظروف الاقتصادية المكنة الحدوث. والمطلوب هو تحديد البديل الأمثل.

حالات الطبيعة / البدائل	النمو الاقتصادي	الركود	التضخم
السندات	14	8	4
الأسهم	16	5	4-
الودائع	10	10	10

بما أن احتمالات حالات الطبيعة ليست معروفة هنا فإن هذه الحالة تعامل على أساس أنها اتخاذ قرار في ظل عدم التأكد. وفيما يلي توضيح لكيفية تحليلها باستخدام الطرق الخمس آنفة الذاكرة:

1- الاحتمالات المتساوية: وهنا نعطي احتمالات متساوية لحالات الطبيعة وذلك بأن نقسم واحد صحيح على مجموع حالات الطبيعة لتحديد احتمال حدوث كل منها. وبما أنه يوجد لدينا هنا ثلاث حالات طبيعية فإن احتمال حدوث كل منها يساوي واحد على ثلاثة

(3/1). وبعد تحديد الاحتمالات، نقوم بضرب المردودات لكل بديل باحتمال حالة الطبيعة المرتبطة بذلك المردود وتسمى هذه النتيجة بالقيمة المتوقعة، ثم نجمع الناتج لنحصل على قيم المردودات المتوقعة لكل من البدائل ونختار الأفضل- أي الأعلى في حالة الربح والأقل في حالة التكاليف - وذلك كما يلي:

القيمة المتوقعة لعائد السندات = $0.333\ (14) + 0.333\ (8) + 0.333$

$(4) = 8.66$

أو $0.333\ (4 + 8 + 14) = 8.66$

أو $\frac{4 + 8 + 14}{3} = 8.66$

القيمة المتوقعة لعائد الأسهم = $0.333\ (4 + 5 + 16) = \frac{17}{3} = 5.67$

القيمة المتوقعة لعائد الودائع = $0.333\ (10 + 10 + 10) = \frac{30}{3} = 10$

وهنا نختار الودائع لأنها تحقق لنا أعلى مردود وهو 10.

2- معيار التفاؤل: وهنا نفترض أن متخذ القرار يكون متفائلاً ويتوقع الحصول على أفضل النتائج، لذلك فإنه يختار المردود الأفضل لكل بديل ومن ثم يختار الأفضل من بينها (Maximum of the maximum "Maximax")، لذلك فإن القرار يكون هنا هو اختيار الأسهم حيث تحقق أعلى مردود وهو (16).

البدائل	أفضل المردودات
السندات	14
الأسهم	(16) البديل الأفضل
الودائع	10

3- **معيار التشاؤم**: وتعتمد هذه الطريقة على الافتراض بأن متخذ القرار يكون متشائماً أو حذر ويتوقع الحصول على أسوأ النتائج، لذلك فإنه يحدد أسوأ النتائج لكل بديل ومن ثم يختار أفضلها Maximum of the minimum (maximin).

البدائل	أسوأ المردودات
السندات	4
الأسهم	4-
الودائع	(10) افضل النتائج

4- **المعيار الواقعي أو المعدل الموزون طريقة المعاملات**: وبموجب هذه الطريقة فإننا نحدد معامل المعيار الواقعي (α) (معاملات للتفاؤل والتشاؤم) وتعتبر هذه المعاملات كأوزان أو نسب لكل من الحالتين ويقوم متخذ القرار بتحديدها بحيث يكون مجموعها 100 %. فإذا افترضنا مثلاً أن معامل التفاؤل هو 60% فإن معامل التشاؤم يساوي = 40% 1 - 60% وبعد تحديد هذه المعاملات نقوم بضرب النتائج التي تم اختيارها في حالة التفاؤل بمعامله وكذلك النتائج التي تم اختيارها في حالة التشاؤم بمعامله ومن ثم نجمع ناتج العمليتين لكل من البدائل ونختار البديل الأفضل.

المعاملات	%60	%40
البدائل	النتائج في حالة التفاؤل	النتائج في حالة التشاؤم
السندات	14	4
الأسهم	16	4-
الودائع	10	10

عائد السندات = 0.60 (14) + 0.40 (4) = (10)

عائد الأسهم = 0.60 (16) + 0.40 (-4) = 8

عائد الودائع = 0.60 (10) + 0.40 (10) = 10

ويمكن وضع المعادلة الآتية:

المعيار الواقعي لبديل معين = α (أفضل عائد في الصف) + (1-α) أسوأ عائد في الصف.

وبناء على ذلك نختار أياً من السندات أو الودائع لأنهما يحققان نفس المردود.

5- **معيار الندم**: وتهدف هذه الطريقة إلى تخفيض معدل ندم متخذ القرار عند اختياره

لبديل دون آخر تحت حالات الطبيعة المختلفة. وبالنسبة لمثالنا، فلو استثمرنا في الأسهم مثلاً وحدثت حالة الطبيعة الأولى فإننا لا نندم لأننا قمنا باختيار البديل الأفضل من الأساس. أما إذا كنا قد استثمرنا في السندات أو الودائع فإننا سوف نندم على الفرق بين كل من هذين المردودين ومردود الأسهم. وتعتبر هذه الفروق بمثابة فرص ضائعة. من هنا نرى أن هذه الطريقة تتلخص بأن نبدأ بتحديد أعلى قيمة في كل عمود (في حالة الربح) ونطرح منها كافة القيم في ذلك العمود وتسمى المصفوفة الجديدة بمصفوفة الندم. وبما أن هدفنا هو تخفيف ذلك الندم فإننا نحدد أعلى ندم يمكن أن يحصل عند اختيار أي من البدائل ومن ثم نختار الندم الأقل. أي أننا نختار أفضل الأسوأ أو ما يسمى Minimum of the maximum (minimax) وفيما يلي توضيح لخطوات هذه الطريقة باستخدام نفس المثال:

أ- تحديد أعلى قيمة في كل عمود وهي (16) في العمود الأول و(10) في العمود الثاني وكذلك (10) في الثالث.

ب- طرح القيم في كل عمود من أعلى قيمة به ووضع النتائج في مصفوفة الندم.

العمود الأول	العمود الثاني	العمود الثالث
2=14-16	2=8-10	6=4-10
0=16-16	5=5-10	14=(4-)-10
6=10-16	0=10-10	0=10-10

مصفوفة الندم

حالات الطبيعة / البدائل	النمو الاقتصادي	الركود	التضخم
السندات	2	2	6
الأسهم	0	5	14
الودائع	6	0	0

جـ- تحديد أعلى ندم لكل من البدائل تحت جميع حالات الطبيعة. وهنا نأخذ أعلى قيمة في كل صف.

الصف	أعلى قيمة
الأول	(6)
الثاني	(14)
الثالث	(6)

د- تحديد أقل ندم ويتمثل هنا في اختيار أي من السندات أو الودائع حيث أنهما يحققان أقل ونفس المستوى من الندم.

مثال (4): تمثل مصفوفة القرارات التالية تكاليف مجموعة من البدائل (1 .2 .3 .4). تحت حالات الطبيعة (أ، ب، ج، د) والمطلوب هو استخدام الطرق السابقة لتحديد البديل أو البدائل الأفضل.

حالات الطبيعة / البدائل	أ	ب	ج	د
1	5	7	8	4
2	9	4	7	5
3	10	8	6	4
4	7	9	6	3

1- **طريقة الاحتمالات المتساوية**: وهنا يكون احتمال حدوث كل من حالات الطبيعة هو 25%.

- التكلفة المتوقعة للبديل الأول = 0.25 (5+7+8+4) = (6)
- التكلفة المتوقعة للبديل الثاني = 0.25 (9+4+7+5) = 6.25
- التكلفة المتوقعة للبديل الثالث = 0.25 (10+8+6+4) = 7
- التكلفة المتوقعة للبديل الرابع = 0.25 (7+9+6+3) = 6.25
- وهنا نختار البديل الأول لأنه يحقق أقل التكاليف.

2- **معيار التفاؤل**: وبما أن النتائج هنا هي عبارة عن تكاليف فإن التفاؤل يعني تحديد أقل التكاليف لكل من البدائل ومن ثم اختيار أقلها أي Minimum of the minimum (min-imin) وهي عكس معالجة طريقة الربح تماماً.

البديل	أقل تكلفة
1	4
2	4
3	4
4	(3)

3- **معيار التشاؤم**: وهنا نحدد أعلى التكاليف لكل بديل وبعدها نختار الأقل من بينها.

البديل	أقل تكلفة
1	(8)
2	9
3	10
4	9

4- **طريقة المعاملات أو المعيار الواقعي**، بافتراض أن معامل المعيار الواقعي التفاؤل يساوي 0.7 وهنا نختار أقل النتائج

البديل الأول = 0.7 (4) = 0.3 (8) = 5.2

البديل الثاني = 0.7 (4) + 0.3 (9) = 5.5

البديل الثالث = 0.7 (4) + 0.3 (10) = 5.8

البديل الرابع = 0.7 (3) + 0.3 (9) = (4.8)

5- **معيار الندم**: وهنا نقوم بتحديد أقل قيمة في كل عمود- حيث أننا نفضل أقل التكاليف- ونطرحها من كافة القيم في ذلك العمود ومن ثم نقوم بإتباع نفس الخطوات التي تم توضيحها في حالة الربح.

حالات الطبيعة / البدائل	أ	ب	جـ	ج	أعلى ندم
1	0	3	2	1	(3)
2	4	0	1	2	4
3	5	4	0	1	5
4	2	5	0	0	5

3- حالة المخاطرة:

وتتميز هذه الحالة عن غيرها بمعرفة احتمالات حالات الطبيعة، سواء كانت هذه الاحتمالات موضوعية، أي مستندة إلى أسس علمية، أم غير موضوعية ومعتمدة على التقدير الذاتية لمتخذ القرار، فإنها تعامل بنفس الطريقة.

عدم التأكد   المخاطرة   التأكد

فلو رجعنا إلى مثال (3) وافترضنا أن احتمالات حالات الطبيعة الثلاث هي على التوالي (%20،%50،%30) فإن مصفوفة القرارات ستكون بالشكل التالي:

الاحتمالات

حالات الطبيعة / البدائل	النمو الاقتصادي	الركود	التضخم
السندات	14	8	4
الأسهم	16	5	4-
الودائع	10	10	10

ومن أجل تحديد البديل الأفضل فإننا نقوم بضرب الاحتمالات بنتائج كل من البدائل ونجمع حواصل الضرب هذه ونختار أعلاها في حالة الربح وأقلها في حالة التكاليف وذلك كما يلي:

القيمة المتوقعة لعائد السندات = $0.20\ (14+(8)0.50 + (4)\ 0.30 = 8$

القيمة المتوقعة لعائد الأسهم = 0.20 (16)+(5)0.50 + 0.30 (-4) = 4.5

القيمة المتوقعة لعائد الودائع= 0.20 (10)+(10)0.50 + 0.30 (10) = 10

والآن لو افترضنا أننا استطعنا التأكد من حدوث حالات الطبيعة فإننا نستثمر بالمجال الذي يحقق لنا أعلى مردود تحت حالة الطبيعة مؤكدة الحدوث وهذا يعني أننا نستثمر بالأسهم في الحالة الأولى وبالودائع في الحالتين الثانية والثالثة وبذلك تكون القيمة المتوقعة لإجمالي العائد هي:

11.2 = (10) 0.30 + (10)0.50 + (16) 0.20

وتسمى هذه النتيجة بالقيمة المتوقعة في ظل المعلومات الصحيحة ويسمى الفرق بين هذه القيمة (11.2) والقيمة التي اخترناها سابقاً (10) بالقيمة المتوقعة للمعلومات الصحيحة Expected Value of Perfect Information (EVPI) وهذه القيمة هنا =

1.2 = 10 - 11.2

وهذا يعني أننا لا ندفع أكثر من هذه القيمة فيما إذا تطلب الأمر الحصول على المعلومات الصحيحة لأن أقصى مردود يمكن أن نحصل عليه من خلالها هو 1.2

ويمكن توضيح ذلك عن طريق إيجاد القيمة المتوقعة للندم في مثالنا السابق.

الاحتمالات	%20	%50	%30
حالات الطبيعة / البدائل	النمو الاقتصادي	الركود	التضخم
السندات	2	2	6
الأسهم	0	5	14
الودائع	6	0	0

قيمة الندم المتوقعة للبديل الأول = 0.20(2)+(2)0.50 + 0.30 (6) = 3.2

قيمة الندم المتوقعة للبديل الثاني = 0.20 (0)+(5)0.50 + 0.30(14) = 6.7

قيمة الندم المتوقعة للبديل الأول = 0.20(6)+(0)0.50+(0)0.30= (1.2)

من هنا نلاحظ أن القيمة المتوقعة للمعلومات الصحيحة تساوي تكلفة الفرص البديلة أو الضائعة (Expected Opportunity Loss (EOL.

والآن لو كانت مصفوفة القرارات تحتوي على تكاليف وليس أرباح، فإننا نتبع نفس الخطوات مع اختلاف في أسس الاختيار، فمثلاً لو افترضنا أن احتمالات حدوث حالات الطبيعة في مثال (4) هي على التوالي (20%، 15%، 30%، 35%)

فإن التكاليف المتوقعة للبدائل تكون كما يلي:

التكلفة المتوقعة للبديل الأول = 0.20(5)+0.15(7)+0.30(8)+0.35(4) = 5.85

التكلفة المتوقعة للبديل الثاني = 0.20(9)+0.15(4)+0.30(7)+0.35(5) = 6.25

التكلفة المتوقعة للبديل الثالث = 0.20(10)+0.15(8)+0.30(6)+0.35 (4) = 5.8

التكلفة المتوقعة للبديل الرابع = 0.20(7)+0.15(9)+0.3(6) + 0.35(3) = (5.6)

وبناء على ذلك فإننا نختار البديل الرابع لأنه يحقق أقل التكاليف. القيمة المتوقعة للمعلومات الصحيحة =

5.6- (0.20 (5) + 0.15 (4) + 0.3 (6) + 0.35 (3) = 1.15

الندم أو التكلفة المتوقعة للفرص الضائعة

البديل الأول = 0.20 (0) + 0.15 (3) + 0.30 (4) + 0.35 (1) = 1.4

البديل الثاني = 0.20 (4) + 0.15 (0) + 0.30 (1) + 0.35 (1) = 1.8

البديل الثالث = 0.20 (5) + 0.15 (4) + 0.30 (0) + 0.35 (1) = 1.95

البدل الرابع = 0.20 (2) + 0.15 (5) + 0.30 (0) + 0.35 (0) = (1.15)

2-5 العلاقة بين بحوث العمليات وحالات القرارات:

يمكن توضيح العلاقة بين بحوث العمليات وحالات القرارات عن طريق تحديد الأساليب التي يمكن تطبيقها تحت كل من هذه الحالات كما هو موضح بالجدول التالي:

الأسلوب	التأكد	المخاطرة	عدم التأكد
مصفوفة القرارات Decision Table	×	×	×
شجرة القرارات Decision Tree	×	×	
البرمجة الخطية Liner Programming	×		
البرمجة الرقمية Integer Programming	×		
النقل Transportation	×		
التعيين Assignment	×		
المسار الحرج Critical Path Method	×		
أسلوب تقييم ومراجعة البرامج PERT		×	
البرمجة الديناميكية Dynamic Programming	×	×	
سلاسل ماركوف Markov Chains		×	
نظام المخزون Inventory Models	×	×	
نظرية الصفوف Queuing Theory		×	
التنبؤ Forecasting		×	
أنظمة المحاكاة والتقليد Simulation	×	×	

6-2 شجرة القرارات Decision Tree

إن شجرة القرارات هي عبارة عن تمثيل أو رسم لعملية اتخاذ القرارات بشكل يسهل معه تحديد مراحل اتخاذ تلك القرارات، وغالبا ما تستعمل هذه الطريقة عند اتخاذ قرار بشأن المشاكل كبيرة الحجم أو متعددة المراحل وتختلف عن مصفوفة القرارات في أنها يمكن استعمالها لمعالجة المشاكل البسيطة والمعقدة بينما تساعد مصفوفة القرارات في حل المشاكل البسيطة فقط.

الرموز المستخدمة في شجرة القرارات:

- نقطة اتخاذ القرار، ويتم عندها اختيار البديل الأفضل من بين مجموعة البدائل المرتبطة بها.

◉ نقطة اتصال أو حلقة الوصل بين مجموعات من حالات الطبيعة أو البدائل أو بينهما معا.

------ حالات الطبيعة أو البدائل.

مكونات شجرة القرارات:

إن مكونات شجرة القرارات هي نفس مكونات مصفوفة القرارات التي سبقت الإشارة إليها وهي:

- حالات الطبيعة.
- البدائل.
- النتائج.
- الاحتمالات.

والفرق الرئيسي هنا هو أن شجرة القرارات تتسع إلى عدد أكبر من هذه المكونات بحيث أنه يمكن تمثيل أكثر من مصفوفة قرارات في شجرة قرارات واحدة.

خطوات رسم وتحليل شجرة القرارات:

عند رسم شجرة القرارات فإننا نبدأ من اليمين إلى اليسار مستخدمين الخطوات التالية:

1- تحديد أو تعريف المشكلة ووضع نقطة القرار.

2- تحديد البدائل وربطها بنقطة القرار هذه.

3- وصل كل من البدائل بحالات الطبيعة المتعلقة به.

4- تحديد احتمالات حدوث حالات الطبيعة.

5- تحديد نتائج البدائل تحت حالات الطبيعة المختلفة.

أما عملية تحليل شجرة القرارات فتبدأ من اليسار إلى اليمين وبعد الانتهاء من رسمها. وتتلخص هذه العملية بالخطوات التالية:

1- إيجاد القيمة المتوقعة لعائد أو تكاليف كل بديل وذلك بأن نقوم بضرب نتائج البدائل باحتمالات حالات الطبيعة المرتبطة بها ومن ثم نجمع نتائج هذه العملية لكل بديل

بمفرده، وتسمى هذه النتائج بالقيم المتوقعة لعوائد أو تكاليف البدائل وعادة ما توضع هذه القيم بجانب أو داخل نقاط الاتصال المرتبطة بها.

2- المقارنة بين هذه القيم واختيار أفضلها ووضعها بجانب أو داخل نقطة القرار النهائية. وبناء هذه القيمة يتم تحديد البديل الأفضل.

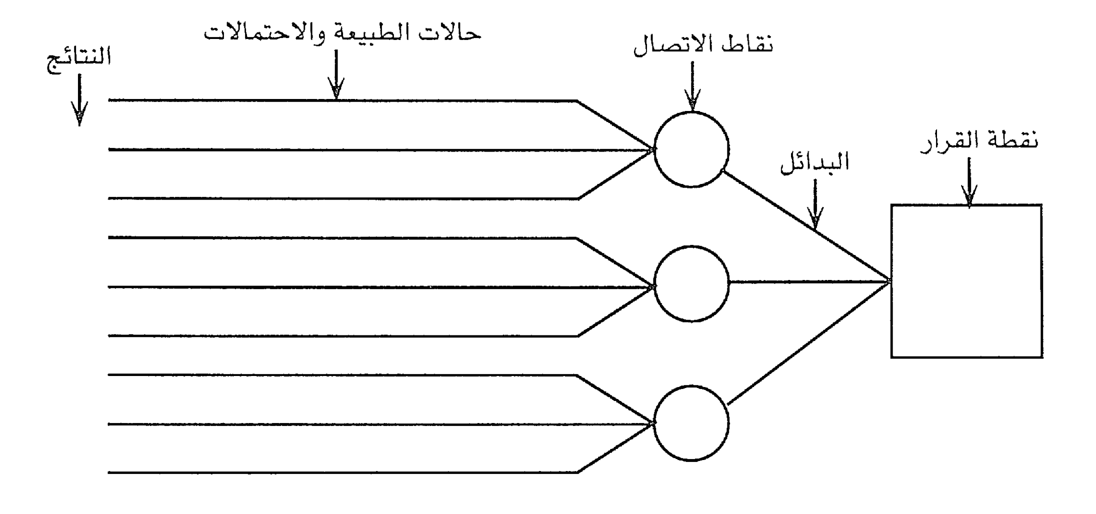
3- عند وجود أكثر من نقطة قرار في شجرة القرارات، فإننا نقوم بتطبيق نفس الخطوتين السابقتين لاتخاذ القرارات المناسبة بشأنها، ومن ثم نستخدم نتائج هذه القرارات للاستمرار والتوصل إلى القرار أو الحل النهائي، وهذا يعني أن شجرة القرارات تساعدنا في استثناء وحذف البدائل غير الجيدة والإبقاء على البدائل الجيدة أثناء عملية الحل وبهدف الوصول إلى القرار المناسب، وهذه الميزة يصعب الحصول عليها عند استخدام مصفوفة القرارات.

وفيما يلي توضيح لخطوات رسم وتحليل شجرة القرارات مستخدمين المثالين (3و4) السابقين والذين سوف تعاد كتابتهما هنا بهدف تسهيل عملية الرجوع إليهما.

مثال (3): مصفوفة العوائد أو المردودات

حالات الطبيعة / البدائل	النمو الاقتصادي	الركود	التضخم
السندات	14	8	4
الأسهم	16	5	-4
الودائع	10	10	10

وفيما يلي نموذج لشجرة القرارات التي يمكن استخدامها لحل هذا المثال:



وفيما يلي حل هذه المصفوفة باستخدام شجرة القرارات:

5 أ 20%
7 ب 15%
8 جـ 30%
4 د 35%
6
1

9 أ 20%
4 ب 15%
7 جـ 30%
5 د 35%
6.25
2

10 أ 20%
8 ب 15%
6 جـ 30%
4 د 35%
7
3

7 أ 20%
9 ب 15%
6 جـ 30%
3 د 35%
6.25
4

6

شجرة القرارات متعددة المراحل:

سبق وذكرنا بأنه باستخدام شجرة القرارات يمكن أن نتخذ القرار على عدة مراحل، وقد تعني هذه المراحل زيادة عدد النقاط المرتبطة باتخاذ القرار أو طول الفترة الزمنية التي يتخذ بشأنها القرار بحيث تعتمد قراراتنا في الفترة اللاحقة على نتائج قرارات الفترة السابقة، وفيما يلي مثال توضيحي لمثل هذه الحالات.

مثال (6):

ترغب إحدى الشركات الصناعية بمواجهة الطلب المتزايد على منتجاتها بإحدى طريقتين هما الوقت الإضافي بتكلفة 4000 دينار سنويا، وشراء آلة جديدة بقيمة 30.000 دينار، ويعتمد اختيار أحدهما على توقعات الطلب خلال السنتين القادمتين، هذا علماً بأن احتمال أن يرتفع الطلب في السنة الأولى هو 80% وهذا يعني أن احتمال انخفاضه هو 20% أما بالنسبة للسنة الثانية فتعتمد البدائل المتوفرة بها على ما كان قد تم اتخاذه في السنة الأولى فإذا كانت الشركة قد قامت بشراء آلة في السنة الأولى وكان الطلب مرتفعا فإن البدائل المتوفرة لديها هي إما شراء آلة أخرى أو الوقت الإضافي، ويعتمد القرار هنا على حالات الطلب والذي قد يكون مرتفعاً باحتمال 30% أو متوسطاً باحتمال 50% أو منخفضاً باحتمال 20% فإذا كانت الشركة قد قامت بشراء آلة في السنة الثانية فإنها تتوقع بأن تحقق المردودات التالية: 100.000 دينار للطلب المرتفع، 70.000 للطلب المتوسط، 50.000 للطلب المنخفض، أما إذا كانت الشركة قد اعتمدت على الوقت الإضافي فإن هذه المردودات سوف تكون على التوالي (80.000، 60.000، 40.000).

أما إذا كانت الشركة قد قامت بشراء آلة في السنة الأولى وحصل انخفاض في المبيعات فإنه ليس أمامها سوى بديل واحد وهو عدم إجراء أي تغيير وفي هذه الحالة تتوقع أن تكون مردوداتها 50.000 للطلب المرتفع، 40.000 للمتوسط، 30.000 للمنخفض.

وإذا كانت هذه الشركة قد استعملت الوقت الإضافي في السنة الأولى وحصل ارتفاع في المبيعات خلال تلك السنة فإنها ترغب إما بإضافة آلة جديدة في السنة الثانية أو آلة جديدة والوقت الإضافي معا، أما المردودات المتوقعة تحت حالات الطلب الثلاث على التوالي (60.000، 50.000، 40.000). للحالة الأولى، و(70.000، 60.000، 50.000) للحالة الثانية.

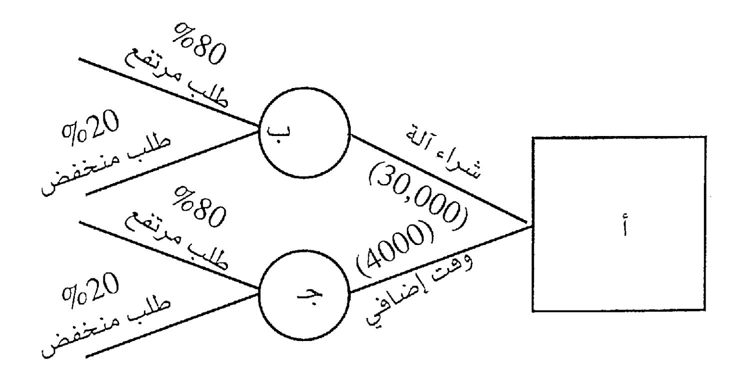
أما إذا حصل انخفاض في المبيعات فإنها سوف تستمر في الوقت الإضافي والذي سوف تكون مردوداته (40.000، 30.000، 20.000).

وفيما يلي توضيح لخطوات حل هذا المثال باستخدام أسلوب شجرة القرارات:

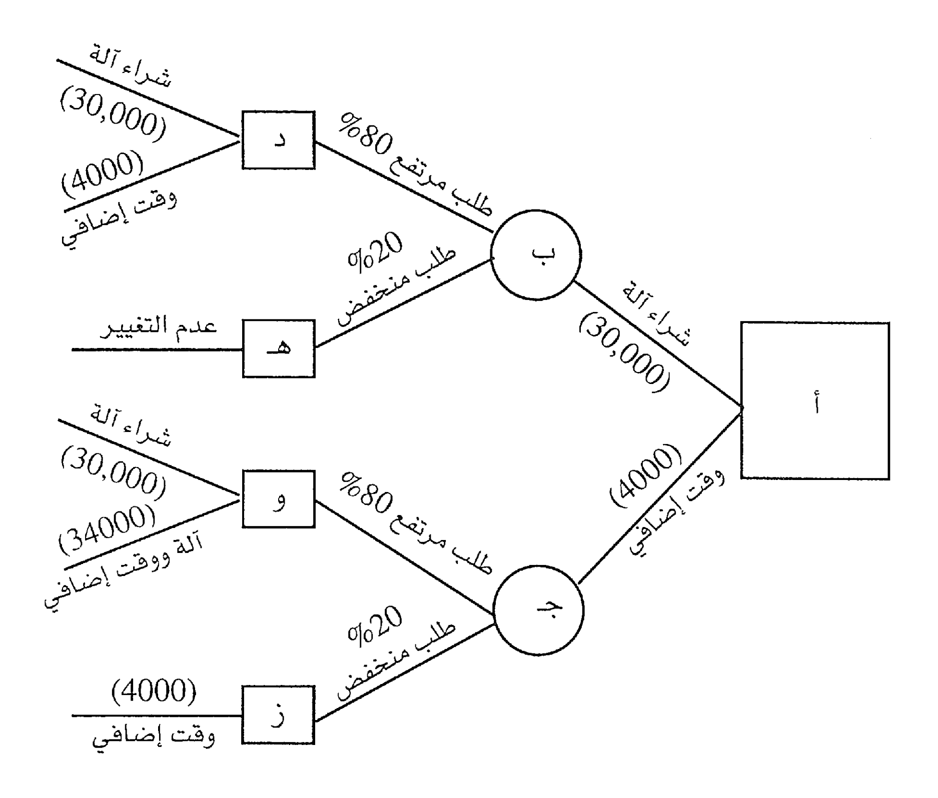
خطوات الحل:

1- **رسم شجرة القرارات:**

أ- تحديد البدائل وتكاليفها أو أرباحها وحالات الطبيعة واحتمالاتها للسنة الأولى ومن ثم رسم جزء شجرة القرارات الممثل لهذه الخطوة، وهذه العملية ممثلة بالنقاط (أ، ب، جـ) على الجزء التالي من شجرة القرارات، حيث نلاحظ أنه يوجد لدينا بديلين وأربع حالات طبيعة - أي اثنتين لكل بديل.

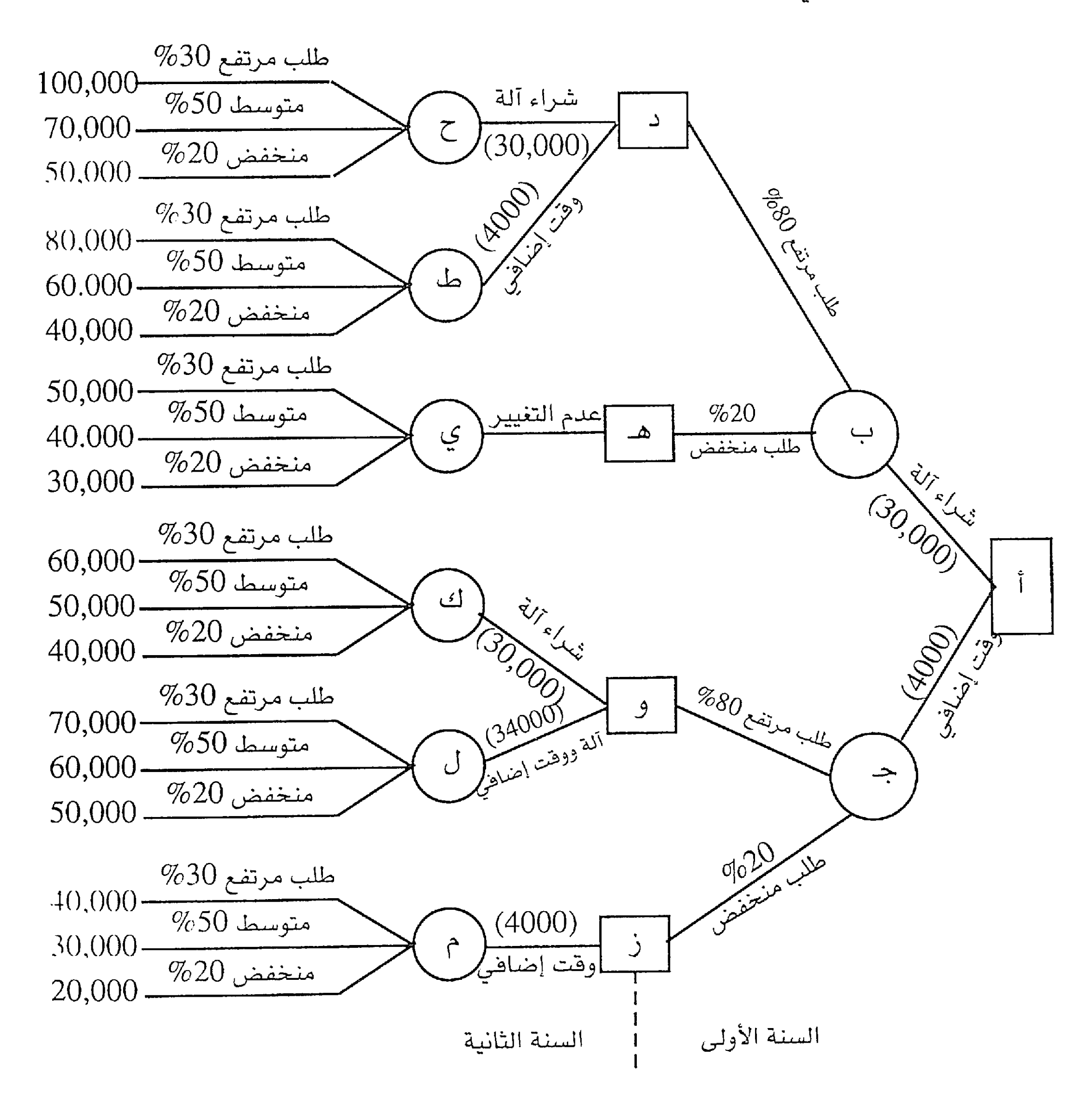


ب- بما أن البدائل الممكنة خلال السنة الثانية معتمدة على ما قد يحدث من حالات الطبيعة خلال السنة الأولى، فإننا نوصل هذه الحالات وبدائل السنة الثانية بنقاط القرار الأربع (د، هـ، و، ز) وتجدر الإشارة هنا إلى أننا ربطنا بين السنة الأولى والسنة الثانية بمجموعة من نقاط القرار لأنها تمثل مرحلة جديدة يؤثر اختيارنا بها لبديل دون آخر على الخطوات اللاحقة كما سيظهر واضحا من خطوات الحل، وفيما يلي رسم توضيحي لهذه الخطوة.



جـ- بعد الوصل بين حالات طبيعة السنة الأولى وبدائل السنة الثانية بنقاط القرار السابقة، نقوم بتحديد حالات الطبيعة واحتمالاتها والنتائج المرتبطة بكل من هذه البدائل ومن هذه الخطوة تبدأ بالنقاط (ح، ط، ي، ك، ل، م).

ويبين الشكل التالي رسماً كاملاً لشجرة القرارات الممثلة لهذاالمثال:



2- تحليل شجرة القرارات واختيار البديل الأفضل:

وفي هذه الخطوة نقوم بتقييم البدائل وذلك عن طريق إيجاد القيم المتوقعة لمردوداتها، هنا نبدأ بطريقة عكسية أي من اليسار إلى اليمين كما أسلفنا وفيما يلي توضيح لاحتساب ورسم خطوات الحل على شجرة القرارات النهائية.

- المردودات المتوقعة عند النقطة (ح) أي عند شراء آلة =

71000 = (30.000) 0.20 + (70.000) 0.50 + (100.000) 0.30

ونضع هذه القيمة بجانب النقطة (ح) ونكرر هذه العملية للقيم والنقاط الأخرى.

المردودات المتوقعة عند النقطة (ط) أي وقت إضافي =

62000 = (40.000) 0.20 + (60.000) 0.50 + (80.000) 0.30

وبما أننا الآن عند نقطة اتخاذ قرار فيجب أن نختار أحد هذين البديلين ومن أجل ذلك نقوم باحتساب صافي المردودات المتوقعة لكل منهما وذلك عن طريق طرح تكاليف كل بديل من قيمة مردوداته المتوقعة.

صافي المردودات المتوقعة عند شراء آلة = 71.000 - 30.000 = 41.000

صافي المردودات المتوقعة للوقت الإضافي = 62000 - 4000 = 58.000

وهنا نختار القيمة الأفضل 58.000 – وهي الأعلى هنا– ونضعها عند نقطة القرار (د).

- المردودات المتوقعة عند النقطة (ي) أي عدم التغيير.

41000 = (30.000) 0.20 + (40.000) 0.50 + (50.000) 0.30

- وبما أنه لا يوجد بديل آخر هنا للمقارنة ولا يوجد كذلك تكاليف فإننا ننقل كامل هذه القيمة إلى النقطة (هـ).

والآن يجب أن نلاحظ بأن القيمتين 58.000 ، 41000 هما المردودات المتوقعة عند نهاية السنة الأولى، وهذا يعني أن شجرة القرارات هنا مكونة من مرحلتين زمنيتين هما السنة الأولى والسنة الثانية.

ومن أجل إيجاد المردودات المتوقعة للبديل الأول (شراء آلة) في السنة الأولى، فإننا نضع إجمالي حاصل ضرب هذه القيم باحتمالات حدوثها عند النقطة (ب) =

54600 = (41.000) 0.20 + (58.000) 0.80 =

صافي القيمة لمردودات البديل الأول = 54.600 - 30.000 = 24.600

- المردودات المتوقعة عند النقطة (ك) أي شراء آلة =

51000 = (40.000) 0.20 + (50.000) 0.5 + (60.000) 10.30

صافي القيمة المتوقعة عند هذه النقطة = 51.000 - 30.000 = 21.000

- المردودات المتوقعة عند النقطة (ل) أي شراء آلة ووقت إضافي =

0.30 (70.000) + 0.50 (60.000) + 0.20 (50.000) = 61000

- صافي القيمة المتوقعة = 61.000 - 34.000 = 27000

- وبما أن هذه القيمة أعلى من القيمة السابقة فإننا نختار هذا البديل ونضعه قيمته المتوقعة عند نقطة القرار (و).

- المردودات المتوقعة عند النقطة (م) أي وقت إضافي =

0.30 (40.000) + 0.50 (30.000) + 0.20 (20.000) = 31.000

- صافي المردودات المتوقعة = 31.000 - 4000 = 27000

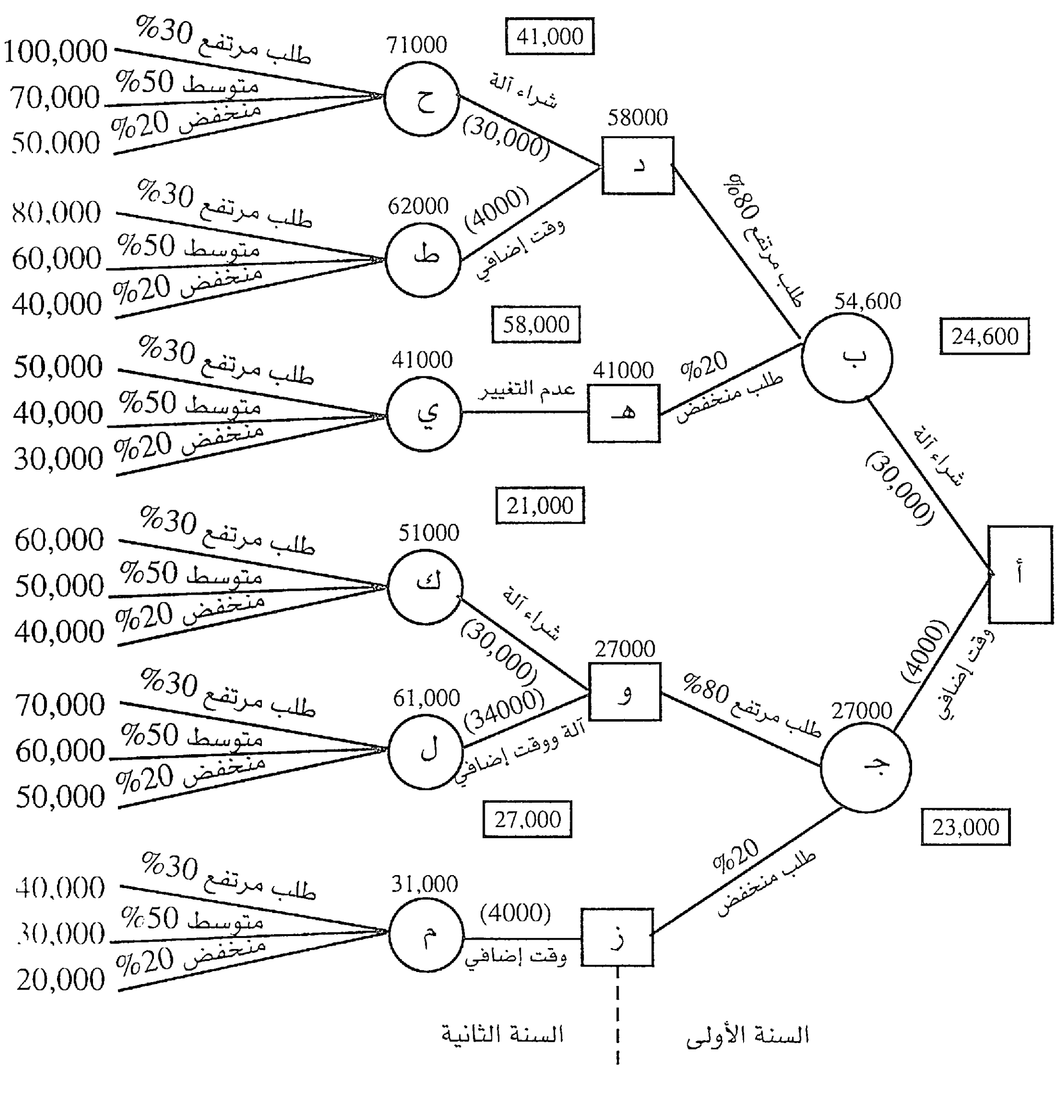
- المردودات المتوقعة للبديل الثاني (وقت إضافي) =

0.80 (27.000) + 0.20 (27.000) = 27000

صافي المردودات المتوقعة = 27000 - 4000 = 23.000

وبما أن صافي المردودات المتوقعة للبديل الأول هي 24,600 وللبديل الثاني 23,000 فإننا نختار البديل الأول ونضع هذه القيمة عند نقطة القرار الأول (نقطة أ).

ومما تجدر الإشارة إليه هنا، بأنه ليس من الضروري أن تتم عملية رسم شجرة القرارات بمراحل مستقلة ومنفصلة وإنما يمكن أن نقوم برسم الشجرة النهائية من البداية ومن ثم نقوم بعملية الحل والاختيار وأن ما قمنا به هنا هو لأغراض توضيح وتسهيل متابعة عمليات الرسم والحل.



مثال (7)

ترغب إحدى الشركات الصناعية باختيار الحجم المناسب لأحد مشاريعها والبدائل المتوفرة هي: الحجم الكبير، المتوسط، أو الصغير.

وفيما يلي المعلومات المتوفرة لديها والتي ترغب باستعمالها كأساس للمقارنة واتخاذ القرار المناسب.

البدائل	حالات الطبيعة والاحتمالات	التكلفة الإجمالية للوحدة بالدينار		
		مشروع صغير	متوسط	كبير
مشروع صغير	طلب منخفض 20%	45	60	100
مشروع متوسط	طلب متوسط 50%	75	40	95
مشروع كبير	طلب مرتفع 30%	90	70	35

وسوف نقوم هنا بتوضيح خطوات اتخاذ القرار ومن ثم كيفية الوصول إلى القرار المناسب باستخدام أسلوب مصفوفة القرارات وأسلوب شجرة القرارات.

خطوات اتخاذ القرار:

1- **تحديد الهدف أو المشكلة**: والهدف هنا هو اختيار حجم المشروع الذي يحقق أقل التكاليف.

2- **تحديد البدائل وهي:**

- بناء مشروع كبير الحجم.
- بناء مشروع متوسط الحجم.
- بناء مشروع صغير الحجم.

3- **تحليل البدائل باستخدام واحد أو أكثر من أساليب التحليل المناسبة**، وسوف نستخدم هنا اثنين من هذه الأساليب هي:

أ- مصفوفة القرارات.

ب- شجرة القرارات.

الحل باستخدام مصفوفة القرارات:

الاحتمالات	20%	50%	30%
حالات الطبيعة / البدائل	طلب منخفض	طلب متوسط	طلب مرتفع
مشروع صغير	45	75	90
مشروع متوسط	60	40	70
مشروع كبير	100	95	35

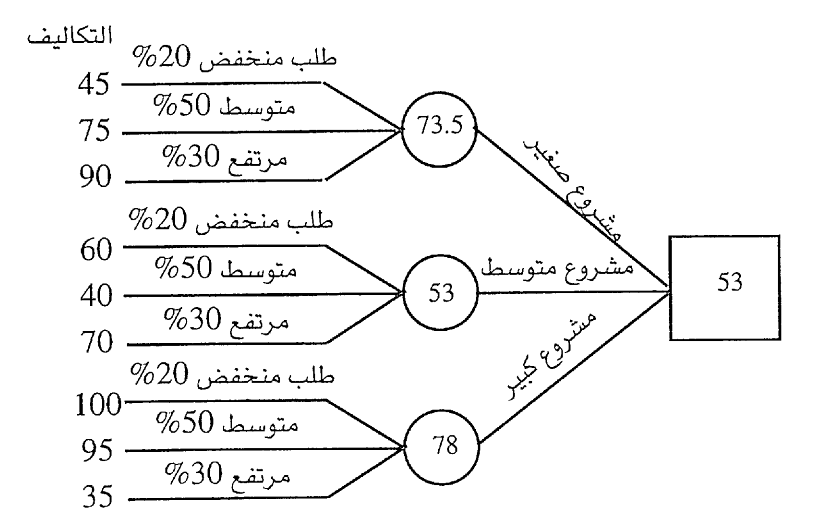
التكلفة المتوقعة للمشروع الصغير = 0.20 (45) + 0.50 (75) + 0.30 (90) = 73.5 دينار.

التكلفة المتوقعة للمشروع المتوسط = 0.20 (60) + 0.50 (40) + 0.30 (70) = 53 دينار.

التكلفة المتوقعة للمشروع الكبير = 0.20 (100) + 0.50 (95) + 0.30 (35) = 78 دينار.

وهنا نختار المشروع متوسط الحجم لأنه يحقق لنا أقل تكلفة متوقعة.

(ب) الحل باستخدام شجرة القرارات:



ونلاحظ هنا أن الطريقتين يجب أن تؤديا إلى نفس النتيجة.

قيمة المعلومات الصحيحة أو الكاملة في هذا المثال المتعلق بالتكاليف =

(القيمة المتوقعة في حال عدم توفر المعلومات الصحيحة)- (القيمة المتوقعة عند توفر المعلومات الصحيحة).

أما إذا كانت المعطيات تمثل مردودات فإن قيمة المعلومات الصحيحة أو الكاملة =

(القيمة المتوقعة عند توفر المعلومات الصحيحة)- (القيمة المتوقعة في حال عدم توفرها).

وتطبيقا لما سبق على هذا المثال فإن قيمة المعلومات الصحيحة=

$$53 - [(35)\ 0.30 + (40)\ 0.50 + (40)\ 0.20] = 13.5$$ دينار

وهذا يعني أننا يجب أن لا ندفع أكثر من هذا المبلغ للحصول على المعلومات الصحيحة لأنها لا تحقق لنا مردودا أكثر من ذلك، وكلما كانت تكلفة الحصول على المعلومات الصحيحة أقل من قيمتها المتوقعة كلما كان ذلك أفضل.

4- **الاختيار والتنفيذ**: وقد اخترنا هنا المشروع متوسط الحجم لأنه يحقق أقل التكاليف.

5- **الرقابة**: فبعد اختيار البديل الأمثل وتنفيذه نقوم بعملية الرقابة والتقييم لإيجاد فيما إذا كان قرارنا جيدا أم لا من حيث مدى تحققنا لأهدافنا من خلاله، وتتطلب هذه العملية إخراج قرارنا إلى حيز التنفيذ، لذلك فإنه يصعب الحكم على جودة قرارنا هنا.

من هنا ترى أنه يجب القيام بالدراسات الكافية وتوخي الدقة في جمع المعلومات عن مكنونات القرار المختلفة إذا كنا نريد لقرارتنا أنتكون على قدر كاف من الدقة، وإن كانت هذه العملية قد تتطلب وقت وتكاليف مرتفعة، إلا أن هذه قد تكون أقل من تلك اللازمة لتعديل قرار خاطئ.

7-2 نظرية بيز Bayes' Theory

لقد سبق وذكرنا بأن عملية اتخاذ القرارات في حالة المخاطرة تشترط وجود احتمالات لحدوث حالات الطبيعة المختلفة، كما ذكرنا أيضا بأن مستوى الدقة في تقدير هذه الاحتمالات يختلف حسب طريقة الحصول عليها، ومن أجل الحصول على تقديرات أكثر دقة فإنه من المستحسن الاستفادة من الخبرات السابقة، وهذا يعني ضرورة قياس مدى الدقة في تقديراتنا السابقة، فقد تكون هذه التقديرات كاملة أو ليست كاملة الدقة، فإذا كانت كاملة الدقة فإننا نعتمد عليها 100% كأساس لتقديراتنا الاحتمالية الحالية، أما إذا لم تكن كاملة الدقة فإننا نقوم بعملية تعديل تقديراتنا الاحتمالية الحالية بما يتفق ونسب النجاح أو الفشل في تقديراتنا السابقة، وهذا يعني أن تعديل أو عدم تعديل احتمالاتنا الحالية يعتمد على دقة تقديراتنا السابقة، ومن أجل تسهيل عملية التعديل المشروطة هذه فإننا سوف نستخدم نظرية معروفة وواسعة الانتشار تسمى "نظرية بيز":

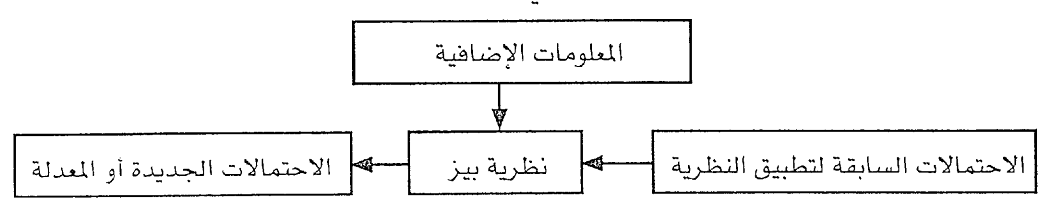
وتمر عملية إيجاد الاحتمالات باستخدام هذه النظرية بعدد من المراحل هي:

أ- تحديد الاحتمالات المسبقة (الحالية) أي الاحتمالات قبل استخدام النظرية.

ب- الحصول على المعلومات الإضافية، أي الاستفادة من الخبرات السابقة.

ج- إيجاد الاحتمالات اللاحقة (الجديدة) التي نحصل عليها نتيجة دمج الاحتمالات المسبقة والمعلومات الإضافية وفقاً لمبادئ نظرية بيز.

ويمكن تصوير مراحل هذه العملية كما يلي:



وتعتمد نظرية بيز على مبادئ الاحتمالات المشروطة، والاحتمال المشروط يعني احتمال حدوث حدث معين أو ظاهرة معينة شريطة وقوع حدث أو ظاهرة أخرى. فاحتمال وقوع الحدث (أ) شريطة وقوع الحدث (ب) يرمز له بالرمز ح (أ/ب).

وتختلف طرق احتساب هذه الاحتمالات المشروطة حسب طبيعة العلاقة بين الأحداث والتي إما أن تكون أحداثاً مستقلة (Independent) أو ليست مستقلة.(Dependent)

والأحداث المستقلة هي التي لا يوجد بينها علاقة ولا تؤثر على بعضها البعض. فإذا كان الحدثان (أ،ب) حدثين مستقلين فإن ح (أ/ب) يساوي احتمال حدوث (أ) أي ح (أ) فقط. وبنفس المفهوم فإن ح (ب/أ) يساوي ح (ب). وهذا يرجع إلى عدم وجود علاقة بين هذين الحدثين، أي أن وقوع أحدها لا يؤثر على وقوع الآخر.

أما الأحداث غير المستقلة فهي تلك التي توجد بينها علاقة ويؤثر وقوع أحدها على غيره. ونتيجة لهذا التداخل فإن تطبيق الاحتمالات المشروطة يكون أكثر اتساعاً في هذا المجال.

والقانون العام لإيجاد الاحتمالات المشروطة في مثل هذه الحالات هو:

$$ح\,(أ/ب) = \frac{ح\,(أب)}{ح\,(ب)} = \frac{ح\,(ب/أ)\ ح\,(أ)}{ح\,(ب/أ)\ ح\,(أ) + ح\,(ب/أ)ح(أ)}$$

وهذا يعني أن احتمال حدوث (أ) شريطة وقوع (ب) يساوي احتمال حدوث الاثنين معاً مقسوماً على مجموع احتمالات حدوث (ب).

وبناء على ذلك، فقد تم وضع أسس نظرية بيز والتي قد تتناول عدداً أكبر من الأحداث المتداخلة. وفيما يلي مثال توضيحي لأسس وطريقة إيجاد الاحتمالات باستخدام مبادئ هذه النظرية.

مثال (8): لو افترضنا أن الشركة المذكورة في مثال (7) كانت قد توفرت لديها المعلومات التالية والتي تعكس مستوى الدقة في تقديراتها الاحتمالية السابقة لحالات الطلب الثلاث (المنخفض، المتوسط، والمرتفع).

حالات الطبيعة / النتائج	طلب منخفض (س)	طلب متوسط (ص)	طلب مرتفع (ع)
طلب منخفض (س)	0.6	0.1	0.2
طلب متوسط (ص)	0.3	0.7	0.2
طلب مرتفع (ع)	0.1	0.2	0.6

وإنها تريد استخدام نظرية بيز لتعديل احتمالاتها الحالية أي- السابقة لتطبيق النظرية- لحالات الطلب الثلاث والتي هو على التوالي (20%، 50%، 30%) ومن ثم اتخاذ القرار المناسب بما يتفق والمعلومات الجديدة.

خطوات الحل مع التوضيحات المرافقة:

أولاً: تحديد احتمالات حالات الطلب قبل تطبيق النظرية. والتي هي حسب إدراجها في نص السؤال.

طلب منخفض ويرمز له هنا بالرمز (س) = 0.2

طلب متوسط ويرمز له هنا بالرمز (ص) = 0.50

طلب مرتفع ويرمز له هنا بالرمز (ع) = 0. 30

ثانياً: توضيح بنود مصفوفة المعلومات الإضافية. فلو أخذنا العمود الأول من المصفوفة مثلاً:

	س
س	0.6
ص	0.3
ع	0.1

فهذا يعني أننا قد توقعنا طلباً منخفضاً وكان منخفضاً فعلاً 60% من الوقت، بينما كان متوسطاً 30% ومرتفعاً 10%. وهذا يعكس طبيعة الفرق بين ما نتوقعه وما قد يحدث فعلاً. ويمكن تفسير باقي بنود المصفوفة بنفس الأسلوب.

وبناء على ذلك فإن الاحتمالات المشروطة لحالات الطلب في هذا المثال تكون بقراءتها عمودياً كما يلي:

ح (س/س) = 0.6　　ح (س/ص) = 0.1　　ح (س/ع) = 0.2

ح (ص/س) = 0.3　　ح (ص/ص) = 0.7　　ح (ص/ع) = 0.2

ح (ع/س) = 0.1　　ح (ع/ص) = 0.2　　ح (ع/ع) = 0.6

ثالثاً: استخدام نظرية بيز لإيجاد الاحتمالات الجديدة لحالات الطلب الثلاث اعتماداً على تقديراتنا الحالية والمعلومات الإضافية وذلك كما يلي:

ح (س/س) وهذا يعني احتمال أن يكون الطلب منخفضاً فعلاً فيما إذا كنا قد توقعناه منخفضاً وهو يساوي.

$$\frac{\text{ح (س/س) ح (س)}}{\text{ح (س/س) ح (س) + ح (س/ص) ح (ص) + ح (س/ع) ح (ع)}} = \frac{\text{ح (س/س) ح (س)}}{\sum \text{ح (س)}}$$

$$\frac{0.6\ (0.2)}{0.6\ (0.2) + 0.1\ (0.5) + 0.2\ (0.3)} = \frac{0.12}{0.23} = 52\%$$

$$\text{ح (ص/س)} = \frac{\text{ح (س/ص) ح (ص)}}{\sum \text{ح (س)}} = \frac{0.1\ (0.5)}{0.23} = 22\%$$

$$\text{ح (ع/س)} = \frac{\text{ح (س/ع) ح (ع)}}{\sum \text{ح (س)}} = \frac{0.1\ (0.3)}{0.23} = 26\%$$

وبناء على ذلك فإن احتمال (س) قد أصبح 23% بدلاً من 20% سابقاً.

$$\text{ح (س/ص)} = \frac{\text{ح (ص/س) ح (س)}}{\text{ح (ص/س) ح (س) + ح (ص/ص) ح (ص) + ح(ص/ع) ح(ع)}} = \frac{\text{ح (ص/س) ح (س)}}{\sum \text{ح (ص)}}$$

$$\%13 = \frac{0.06}{0.47} = \frac{(0.2)\ 0.3}{(0.3)\ 0.2 + 0.5)\ 0.7 + (0.2)\ 0.3}$$

$$\text{ح (ص/ص)} = \frac{\text{ح (ص/ص) ح (ص)}}{\sum \text{ح (ص)}} = \frac{(0.5)\ 0.7}{0.47} = \%74$$

$$\text{ح (ع/ص)} = \frac{\text{ح (ص/ع) ح (ع)}}{\sum \text{ح (ص)}} = \frac{(0.3)\ 0.2}{0.47} = \%13$$

$$\text{ح (س/ع)} = \frac{\text{ح (ع/س) ح (س)}}{\text{ح (ع/س) ح (س) + ح (ع/ص) ح (ص) +ح (ع/ع) ح(ع)}}$$

$$\%7 = \frac{0.02}{0.3} = \frac{(0.2)\ 0.1}{(0.3)\ 0.6 + (0.5)\ 0.2 + (0.2)\ 0.1}$$

$$\text{ح (ص/ع)} = \frac{\text{ح(ع/ص) ح (ص)}}{\sum \text{ح (ع)}} = \frac{(0.3)\ 0.6}{0.30} = \%33$$

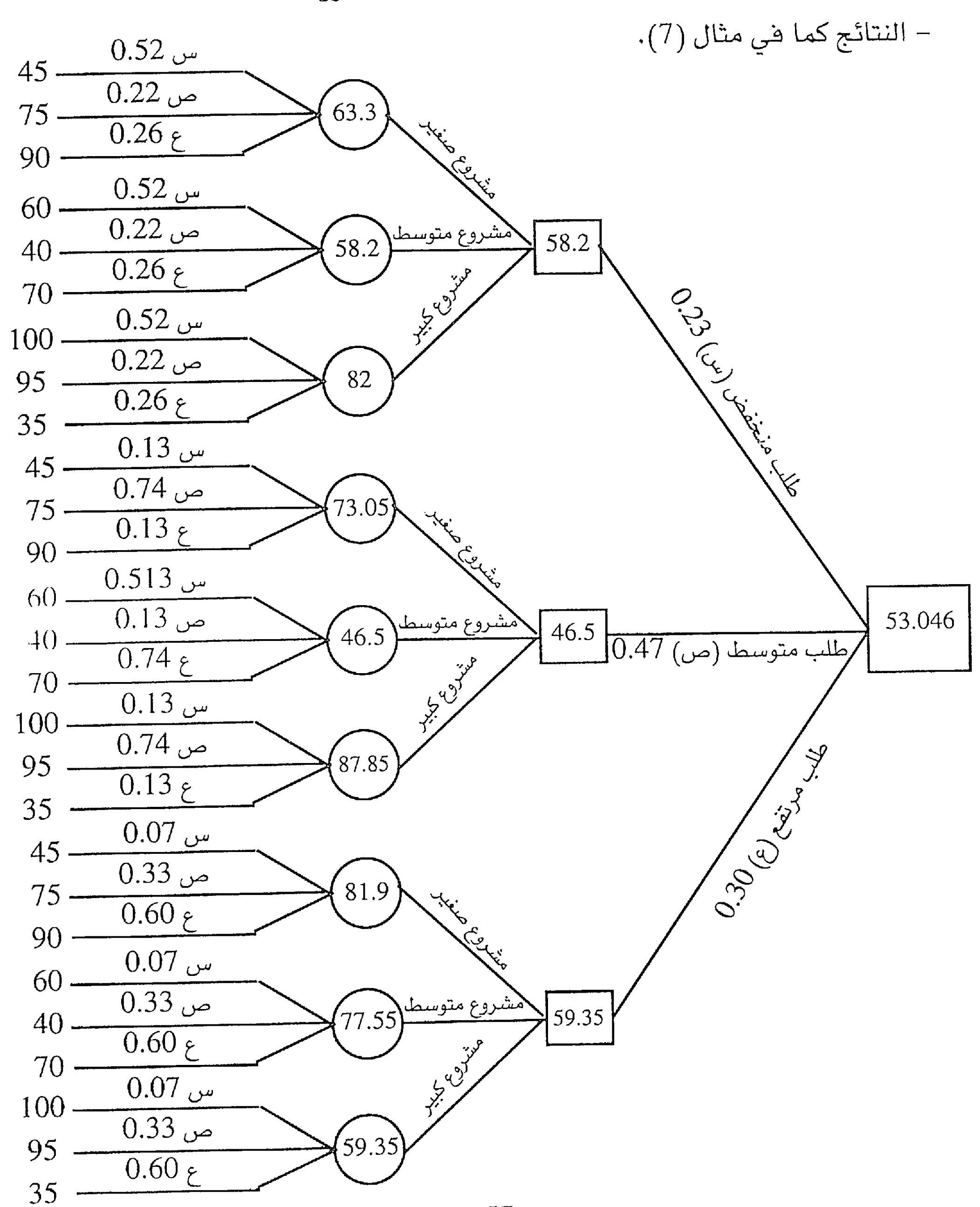
$$\text{ح (ع/ع)} = \frac{\text{ح (ع/ع) ح (ع)}}{\sum \text{ح (ع)}} = \frac{(0.3)\ 0.6}{0.30} = \%60$$

رابعاً: وضع الاحتمالات الجديدة لحالات الطلب الثلاث ودقة التقديرات في مصفوفة جيدة. ونلاحظ أن احتمالات حالات الطلب قد تعدلت لتصبح (23%و47%و30%) بدلا من (20% و50% و30%).

التوقعات	طلب منخفض (س)	طلب متوسط (ص)	طلب مرتفع (ع)
طلب منخفض (س)	0.52	0.13	0.07
طلب متوسط (ص)	0.22	0.74	0.33
طلب مرتفع (ع)	0.26	0.13	0.60

خامساً: رسم شجرة القرارات وتتكون شجرة القرارات هنا من الأجزاء المتسلسلة التالية:

- حالات الطلب المتوقعة واحتمالات حدوثها.
- البدائل أو الحجم المناسب للمشروع، فإما أن يكون هذا المشروع صغيراً أو متوسطاً أو كبيراً.
- حالات الطلب المرتبطة بهذه البدائل واحتمالاتها المشروطة.
- النتائج كما في مثال (7).



سادساً: **تحليل القرارات**: وفي هذه الخطوة نقوم بإيجاد النتائج المتوقعة للبدائل المختلفة وذلك باستخدام النتائج المعطاة واحتمالات حالات الطبيعة.

التكلفة المتوقعة للوحدة في المشروع الصغير/ طلب منخفض =

$$63.3 = (90)\ 0.26 + (75)\ 0.22 + (45)\ 0.52$$

التكلفة المتوقعة للوحدة في المشروع المتوسط / طلب منخفض =

$$58.2 = (70)\ 0.26 + (40)\ 0.22 + (60)\ 0.52$$

التكلفة المتوقعة للوحدة في المشروع الكبير/ طلب منخفض =

$$82 = (35)\ 0.26 + (95)\ 0.22 + (100)\ 0.52$$

وبما أن أقل تكلفة متوقعة هنا هي (58.2)، فإننا ننقل هذه القيمة إلى نقطة القرار المرتبطة بها. وهذا يعني أنه في حالة الطلب المنخقض فإننا نفضل المشروع متوسط الحجم.

وبنفس الطريقة نقوم بإيجاد القيم الأخرى واختيار البدائل الأفضل، وتظهر نتائج هذه الخطوات على شجرة القرارات نفسها. وتعني هذه النتائج بأننا نختار المشروع المتوسط إذا كان الطلب متوسطاً والمشروع الكبير إذا كان الطلب مرتفعاً.

ومن أجل الوصول إلى إجمالي تكلفة الوحدة المتوقعة. فإننا نضرب القيم المختارة عند نقاط القرار الثلاث باحتمالات حالات الطلب المرتبطة بكل منها.

التكلفة المتوقعة للوحدة =

$$53.046 = (59.35)\ 0.30 + (46.5) + 0.47 + (58.2)\ 0.23$$

ونلاحظ أن هذه القيمة هي أعلى من القيمة التي حصلنا عليها في السابق وهي 0.53 وهذا يعني أننا لا نفضل شراء أو استخدام المعلومات الجديدة. وفيما لو كانت القيمة المتوقعة الجديدة تمثل تكلفة أقل أو ربحاً أعلى فإننا نقوم بالحصول عليها شريطة أن لا يتجاوز المبلغ المدفوع مقابل ذلك الوفر الناتج في التكاليف أو الزيادة الناتجة في الربح.

ونلاحظ هنا أنه عندما قمنا برسم شجرة القرارات، كنا قد أوصلنا حالات الطلب واحتمالاتها الجديدة بنقطة القرار الأساسية، ومن ثم قمنا بوضع البدائل المختلفة وحالات الطلب الثلاث لكل منها باحتمالاتها المعدلة ونتائجها أي تكاليفها.

أسئلة:

1- ما هي أنواع القرارات؟

2- قارن بين أنواع القرارات المختلفة؟

3- ما هي أساليب تحليل القرارات وقارن فيما بينها؟

4- ما هي أهم حالات اتخاذ القرارات وقارن فيما بينها؟

5- ما هو المقصود بقيمة المعلومات الصحيح؟

6- ما هو المقصود بقيمة الفرص البديلة أو الضائعة؟

7- وضح مستعيناً بأمثلة طبيعية العلاقة بين بحوث العمليات وحالات اتخاذ القرارات.

8- عرف شجرة القرارات وما هي أهم مكوناتها؟

9- عرف نظرية بيز وبماذا تستخدم؟

10- ما هي الاحتمالات المشروطة وأعطي أمثلة عليها؟

تمارين:

1- فيما يلي مقادير الطلب المتوقع على منتجات إحدى الشركات. والمطلوب هو إيجاد الدخل المتوقع إذا كان سعر بيع الوحدة 23 ديناراً.

عدد الوحدات	الاحتمال
45	0.13
46	0.12
47	0.20
48	0.28
49	0.14
50	0.13

2- يمثل الجدول التالي معدل إقامة المرضى في أحد مستشفيات مدينة عمان بالأيام، ويحقق هذا المستشفى ربحاً صافياً مقداره 65 دينار باليوم للأيام الأربعة الأولى من إقامة المريض و50 ديناراً لكل يوم زيادة عن ذلك. فما هو مقدار الربح السنوي المتوقع إذا كان هذا المستشفى يقبل 15 مريضاً يومياً.

عدد أيام الإقامة	الاحتمال
2	0.05
3	0.15
4	0.15
5	0.20
6	0.20
7	0.15
8	0.10

3- يحتوي الجدول التالي على معلومات عن عدد السيارات المباعة في إحدى الشركات خلال سنة معينة، فما هو معدل السيارات المباعة يومياً وما هو إجمالي الربح إذا كان معدل ربح السيارة الواحدة يساوي 300 ديناراً.

عدد الأيام	عدد السيارات المباعة
10	لا شيء
25	12
32	17
55	10
60	14
75	8
10	35
80	11
18	15

4- يمثل الجدول التالي مقدار الطلب السنوي المتوقع على منتجات إحدى الشركات

الطلب بالوحدة	الاحتمال
1000	0.20
1500	0.25
2000	0.30
2500	0.15
3000	0.10

وتستطيع هذه الشركة الإنتاج بواحدة من ثلاث طرق.

طريقة الإنتاج	التكلفة المغيرة للوحدة بالدينار
أ- الاعتماد على الآلات الموجودة.	5
ب- شراء ألة جديدة تستهلك بالكامل خلال السنة وبسعر 500 دينار.	3
ج- شراء آلة أكثر تعقيداً بسعر 1500 دينار تستهلك بالتساوي على مدى 3 سنوات.	1

والمطلوب هو تحديد طريقة الإنتاج الأفضل.

5- إذا كان أحد محلات بيع الصحف يشتري الصحيفة بسعر 50 فلساً فإذا باعها بسعر يحقق ربحاً مقداره 20 فلساً وإذا لم يتمكن من بيعها فإنه سوف يبيعها في اليوم التالي بسعر 15 فلساً. فإذا كانت خبرة هذا المحل خلال السنة السابقة تتلخص كما يلي:

عدد الصحف المباعة	عدد الأيام
50	100
51	80
52	75
53	60
54	50

أ- مستخدماً مفهوم القيمة المتوقعة، ما هو عدد الصحف الذي تنصح هذا المحل بشرائه لتحقيق أعلى ربح ممكن.

ب- ما هو معدل الربح اليومي.

6- فيما يلي مصفوفة أرباح

حالات الطبيعة / البدائل	1 (0.4)	2 (0.6)
1	20	9
2	12	18
3	5	20

والمطلوب هو:

أ- اختيار البديل الأفضل

ب- إيجاد المدى الاحتمالي لحالة الطبيعة الأولى الذي لا يتغير ضمنه قرارنا السابق.

7- مستخدماً كافة الطرق الممكنة، حل المصفوفة التالية، على أساس أنها:

أ. مصفوفة ربح.

ب. مصفوفة تكاليف.

حالات الطبيعة / البدائل	1	2	3
1	6	9	4
2	7	6	8
3	9	7	5

8- ما هو البديل الأفضل وما هي القيمة المتوقعة للفرص البديلة في كل من التالية:

أ- أرباح.

	0.6	0.2	0.1	0.1
حالات الطبيعة / البدائل	1	2	3	4
1	4	6	9	2-
2	7	6	3	0
3	6	5	4	3
4	0	7	6	4

ب- تكاليف.

	0.1	0.4	0.2	0.3
حالات الطبيعة / البدائل	1	2	3	4
1	7	6	5	3
2	8	9	2	1
3	0	3	4	6
4	4	2	3	5

9- أوجد القيمة المتوقعة للمعلومات الصحيحة في السؤال السابق وقارنها بالقيمة المتوقعة للفرص البديلة.

10- إذا استطاع محل بيع الصحق المشار إليه في سؤال 5، أن يحصل على معلومات أكيدة عن حالة الطلب، فما هو أعلى سعر يمكن أن يدفعه ثمناً لهذه المعلومات.

11- مستخدماً:

أ- الاحتمالات المتساوية.

ب- التشاؤم.

ج- التفاؤل.

د- المعيار الواقعي وبافتراض $\alpha=0.3$

هـ- الندم.

حلل كلاً من التالية:

أ- ربح.

حالات الطبيعة / البدائل	1	2	3	4
1	4	6	5	3
2	1-	2	3	3
3	0	4	3	2
4	7	2	1	4

ب- تكاليف

حالات الطبيعة / البدائل	1	2	3	4
1	5	4	5	3
2	6	4	3	7
3	8	6	5	4
4	9	7	6	3

12- إذا كان لديكم مليون دينار وترغبون استثمارها بأحد البدائل التالية:

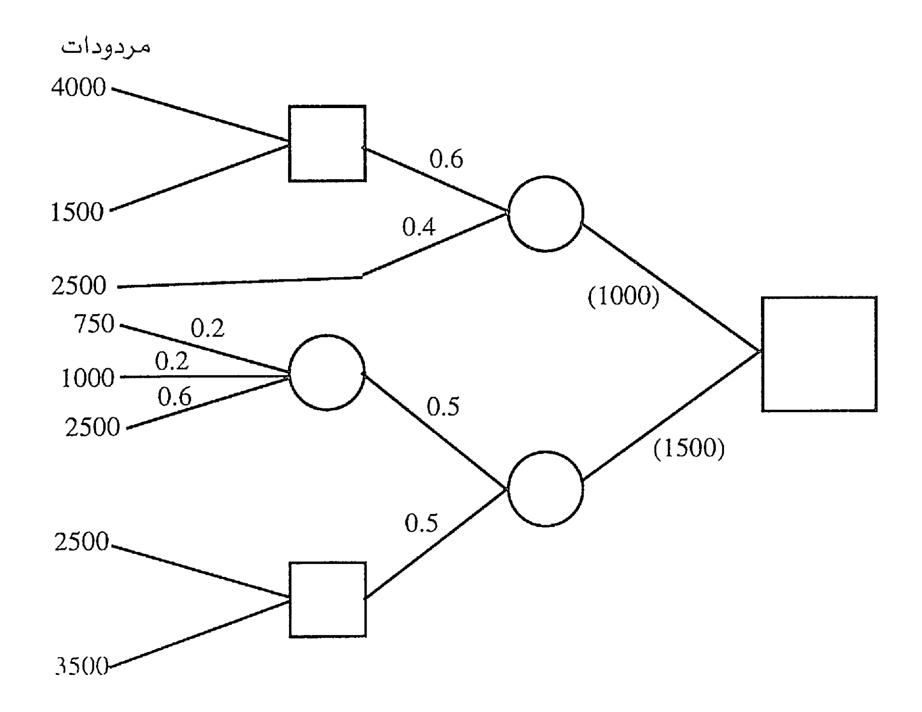
أ- شراء سندات ذات مردود مقداره 10%

ب- شراء قطعة أرض وإمكانية بيعها بربح مقداره 15%، هذا مع العلم بأن الحكومة قد تقوم بشرائها لأغراض التوسع في الخدمات بسعر يزيد 5% عن سعر الشراء.

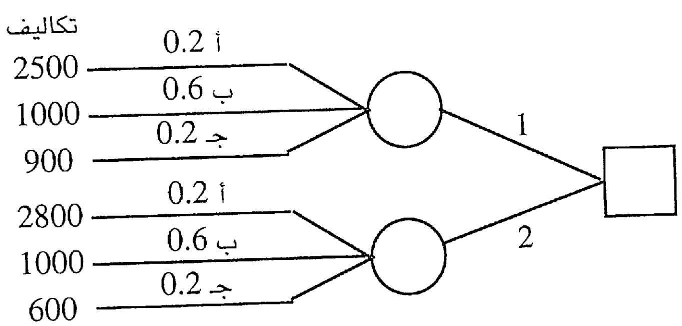
فإذا كانت هذه المعلومات تغطي سنة واحدة فقط، ماذا سيكون قراركم؟

13- أرسم شجرة القرارات وحدد البديل المناسب لكل مصفوفة معطاة في السؤالين 6 و 8.

14- مستعيناً بالمعلومات المتوفرة على شجرة القرارات، المطلوب اختيار البديل الأفضل.



15- اكتب مصفوفة القرارات وحدد البديل المناسب بناء على المعلومات التالية:



16- ترغب إحدى الشركات باختيار موقع مناسب لأحد مشاريعها من بين ثلاثة بدائل. والمطلوب هو تطوير الأسلوب المناسب لمساعدتها على تحليل المعلومات التالية واتخاذ قرار بشأن الموقع.

المواقع / العوامل	أ	ب	ج
المناخ	ممتاز	جيد	سيئ
الأيدي العاملة	متوفرة	قليلة	متوسطة
القوانين والأنظمة	شديدة	ليست شديدة	ليست شديدة
النقل	جيد	جيد	ممتاز
تكلفة الإنشاء	مرتفعة جداً	منخفضة	مرتفعة

17- لو غيرنا الاحتمالات المعطاة في مثال (8) إلى التالية، فهل يتغير القرار السابق أم لا؟ وضح كافة خطوات الحل.

التوقعات / النتائج	طلب منخفض (س) 0.2	طلب متوسط (ص) 0.6	طلب مرتفع (ع) 0.2
طلب منخفض (س)	0.5	0.2	0.1
طلب متوسط(ص)	0.3	0.6	0.2
طلب مرتفع (ع)	0.2	0.2	0.7

18- أمام إحدى شركات النقل فرصة الحصول على عطاء يتعلق بنقل الصحف من المطبعة إلى الموزعين في المناطق المختلفة والمشكلة تتعلق بنوعية العرض الذي يجب أن تقدمه للحصول على هذه الفرصة. وقد حددت أمامها ثلاثة بدائل (أ،ب،ج) حيث يقوم البديل أ على افتراض أن الطلب سيكون مرتفع ويقوم البديل ب على افتراض عدم تغير الطلب عما هو عليه "متوسط" ويقوم البديل ج على افتراض أن الطلب سينخفض، كما حددت الظروف البيئية التي ستواجهها بثلاثة ظروف بيئية هي : طلب مرتفع ومتوسط ومنخفض، كما قدرت الأرباح المصاحبة لاختيار بديل معين وحدوث ظرف بيئي معين وكما يبين الجدول الآتي:

الظروف البيئية

البديل	طلب مرتفع	طلب متوسط	طلب منخفض
أ	16	15	10
ب	10	20	5
ج	(5)	10	18

المطلوب:

1- تحديد البديل الأفضل مع وضع الافتراضات التي تراها مناسبة.

2- تحديد البديل الأفضل وبافتراض أن احتمالات الحدوث للظروف البيئية هي 0.3 للطلب المرتفع 0.3 للطلب المتوسط ، 0.4 للطلب المنخفض.

19- أعطيت المعلومات الكافية المصاحبة لاختيار بديل معين وحدوث ظرف بيئي معين.

الظروف البيئية

البديل	1	2	3
أ	14	22	6
ب	19	18	12
ج	12	17	15

والمطلوب:

أ- تحديد البديل الأفضل وتحت حالة عدم التأكد.

ب- تحديد البديل الأفضل وبافتراض أن احتمالات الحدوث للظروف البيئية هي: 0.3 ، 0.4 ، 0.3 وعلى التوالي.

20- أعطيت المعلومات الربحية الآتية:

الظروف البيئية

البديل	1	2	3	4
أ	10	1	3	4
ب	3	20	2	10
ج	3	4	11	1
د	8	4	2	16

المطلوب تحديد البديل الأفضل:

أ- تحت حالة عدم التأكد.

ب- تحت حالة المخاطرة وبافتراض أن احتمالات الحدوث للظروف البيئية الأربعة قد قدرت ب 0.1 ، 0.2 ، 0.6 ، 0.1 وعلى التوالي.

21- تعترض إحدى شركات صناعة المواد الغذائية مشكلة اتخاذ قرار فيما يتعلق بتطوير وإنتاج مادة تلوين للمواد الغذائية والتي ستكون خالية من المواد الكيماوية.

تكلفة البحث المتعلق بهذه المادة تساوي 100,000 دينار وهذا البحث سيساعدنا في تحديد إمكانية أو عدم إمكانية إنتاج هذه المادة.

الخبراء لدى هذه الشركة توقعوا أن احتمال تطوير هذه المادة يساوي 80% وذلك في حالة كون المادة ممكنة التصنيع، إذا طورت هذه المادة فإن هنالك احتمال أن يقوم المنافسون لنا بمحاولة تطويرها أيضاً، وتعتقد الشركة أن احتمال أن ينجح هؤلاء المنافسون في تطوير هذه المادة هو 30% بناء على قرار المنافسين بإنتاج المنتج أم لا، فإن الشركة ستتخذ قرارها بالمضي أو عدم المضي في تطوير وصناعة هذه المادة.

إذا قررت الشركة إنتاج هذه المادة فإن كلفة شراء ونصب المعدات اللازمة لأنتاجها تقدر

ب 150.000 دينار وقد قدر خبراء الشركة مستويات المبيعات واحتمالاتها وتحت ظروف المنافسة المختلفة كما يأتي:

الحالة البيئية

مستوى المبيعات	وجود منافسين	عدم وجود منافسين	المردود المتوقع
عال	0.2	0.4	500,000
متوسط	0.3	0.5	300,000
منخفض	0.5	0.1	100,000

أخيراً إذا قررت الشركة عدم إجراء البحث وتطوير وإنتاج هذه المادة، فإن باستطاعتها استخدام مواردها المتاحة في بديل آخر والذي سيدر لها ربحاً صافياً قدره 25.000 دينار.

المطلوب تحديد ماذا على الشركة أن تعمل؟

هل عليها أن تقوم بالبحث وإنتاج المادة أم استخدام الموارد المتاحة للبديل الثاني وبالتالي عدم إجراء بحث؟ وذلك باستخدام شجرة القرارات.

22- تفكر إدارة إحدى الشركات الصناعية بإنتاج منتج جديد، وقد توقعت بأن تحقق ربحاً مقداره 100.000 دينار إذا كان الطلب مرتفعاً وستحقق خسارة مقدارها 60.000 دينار إذا كان الطلب منخفضاً. وقد استشارت إدارة الشركة إحدى الشركات المتخصصة في إجراء الدراسات السوقية وذلك للاستفادة من خدماتها في هذا المجال "مجال جمع معلومات إضافية عن سوق المنتج الجديد" وقد اقترحت الشركة المتخصصة بالدراسات السوقية على الشركة الصناعية لاختيار من بين ثلاثة بدائل هي: إجراء مسح سوقي أو دراسة ريادية أو استطلاعية أو عدم القيام بأي نشاط بجمع معلومات إضافية، وقد قدرت كلفة إجراء المسح السوقي ب 5.000 دينار في حين قدرت كلفة الدراسة الريادية والتي ستتضمن إنتاج وتوزيع عينات مجانية ب 20.000 دينار. أما بالنسبة للاحتمالات فقد قدرت الاحتمالات الأولية لأن يكون الطلب مرتفعاً ب 0.5 كذلك قدر احتمال نجاح المسح السوقي " تشير النتائج إلى طلب مرتفع" علما بأن المسح قد تم في ظل طلب مرتفع 0.7 وأن احتمال نجاح المسح علماً بأن المسح قد تم في ظل طلب منخفض =0.2 وكذلك فقد قدر احتمال نجاح الدراسة الريادية علماً بأنها أجريت في ظل طلب مرتفع

ب 0.8 وأن احتمال النجاح علماً بأن الدراسة الريادية قد أجريت في ظل طلب منخفض ب 0.1.

المطلوب:

1- رسم الشجرة الممثلة لهذه المشكلة.

2- استخدام المعلومات المتوفرة واختيار البديل الأمثل.

23- تواجه إحدى الشركات الصناعية مشكلة تتمثل في عدم كفاية الطاقة الإنتاجية المتاحة، ولحل هذه المشكلة قامت بتحديد البدائل الممكنة كما قدرت الظروف البيئية التي ستواجهها وكذلك العوائد التي ستحققها كما هو مبين في الجدول الآتي:

الظروف البيئية

البديل	طلب مرتفع	طلب متوسط	طلب مرتفع
توسع كبير	250,000 دينار	120,000 دينار	(50,000) دينار
توسع متوسط	180,000 دينار	100,000 دينار	30,000 دينار
توسع بسيط	100,000 دينار	80,000 دينار	60,000 دينار
الاحتمال	0.5	0.3	0.2

24- بالعودة للتمرين رقم (23) افترض أن على إدارة الشركة اتخاذ قرار يتعلق بإجراء بحث سوقي أم لا، وفي حالة إجرائه فستكون كلفته 15.000 دينار.

وقد قدرت إدارة الشركة بأن تكون نتائج البحث ناجحة علماً بأن البحث أجري في ظل طلب مرتفع ب 0.6 وأن تكون نتائج ناجحة علماً بأن البحث أجري في ظل طلب متوسط ب 0.2 وأن تكون نتائج البحث ناجحة علماً بأن البحث أجري في ظل طلب منخفض ب0.1 كذلك قدر بأن تكون نتائج البحث وسط علماً بأن البحث أجري في ظل طلب مرتفع ب0.3 و ب 0.6 إذا أجري البحث في ظل طلب متوسط وقدر بأن تكون نتائج البحث وسط علماً بأن البحث أجري في طلب منخفض ب 0.2 وأخيراً قدر احتمال أن يكون البحث غير ناجح علماً بأنه أجري في ظل طلب مرتفع ب 0.1 و ب 0.2 في ظل طلب متوسط، وب 0.7 في ظل طلب منخفض.

المطلوب: تحديد البديل الأفضل باستخدام شجرة القرارات.

25- حدد أحد المستثمرين البدائل الاستثمارية المتاحة أمامه بثلاثة بدائل، وفيما يأتي المعلومات المتعلقة بهذه البدائل ومردوداتها تحت الظروف البيئية المختلفة:

الظروف البيئية

البديل	طلب مرتفع	طلب منخفض
شراء بناية مكونة من شقق سكنية	75,000 دينار	45,000 دينار
شراء بناية مكونة من مكاتب	150,000 دينار	(60,000) دينار
شراء مخازن	45,000 دينار	15,000 دينار
عدم الاستثمار	0	0
الاحتمال	0.6	0.4

كذلك فإن على هذا المستثمر تحديد فيما إذا كان من الأفضل القيام ببحث سوقي أم لا وذلك لجمع معلومات إضافية، علماً بأن تكلفة إجراء البحث تساوي 10,000 دينار، وقد قدرت الاحتمالات المشروطة لنتائج البحث كالآتي: نتائج بحث ناجحة " تشير إلى سوق جيد" علماً بأن البحث قد أجري في ظل ظروف جيدة " طلب مرتفع" تساوي 0.7 واحتمال أن يكون البحث ناجح علماً بأنه قد أجري في ظل ظروف غير جيدة " طلب منخفض" يساوي 0.2.

المطلوب : ايجاد البديل الأمثل لهذا المستثمر وذلك باستخدام شجرة القرارات.

الباب الثاني

البرمجة الخطية

Linear Programming

الفصل الثالث

البرمجة الخطية Linear Programming (LP)

1-3 مقدمة Introduction

إن البرمجة الخطية كغيرها من أساليب بحوث العمليات كانت قد استحدثت لمواجهة مشاكل محددة تحت ظروف وشروط معينة، إلا أن استخداماتها، وبفضل تطوير الوسائل المساعدة، قد توسعت لتشمل مجالات متعددة. فأول استخدام للبرمجة الخطية كان في المجالات العسكرية وذلك للمساعدة في توزيع الموارد المتاحة بين العمليات المختلفة وبالشكل الذي يؤدي إلى زيادة فعالية هذه العمليات. إلا أنها تطورت بعد ذلك بحيث أصبح بالإمكان استخدامها في معظم مجالات اتخاذ القرارات سواء كانت ذات طبيعة اقتصادية أم اجتماعية أم عسكرية. فمثلاً فإنها تستخدم في كافة أنشطة مؤسسات الأعمال كتخطيط ومراقبة الإنتاج، والتسويق، والدعاية، والإعلان، واختيار الفرص الاستثمارية، وسياسات الشراء والتخزين .... وغيرها.

أما أهم مجالات استخدام البرمجة الخطية في الدول النامية بشكل خاص فهي في قطاع الزراعة وذلك فيما يتعلق بأنظمة الري والاستغلال الأمثل للمساحات الزراعية المتاحة وزيادة مردوداتها من خلال توزيع هذه المساحات بين المحاصيل المختلفة. كما تستخدم في مجالات التربية والتعليم من حيث وضع النظم المناسبة والكفيلة بتحقيق التوزيع الأمثل للإمكانات المادية والبشرية المتاحة بما يتفق وأهداف وسياسات الجهة متخذة القرار. وأخيراً فإن استخدامها بدا يظهر في المجالات الصناعية ومجال النقل.

لقد طورت البرمجة الخطية على يد جورج دانتزغ (George Dantzig). في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptiste Fourier) كان قد تنبه لمساهماتها المحتملة منذ عام 1923، وفي عام 1939 اهتم العالم الرياضي الروسي كاتوروفتش (L.V. Katorovich) في استخدام الرياضيات لحل مشاكل التخطيط. ويمكن القول بأن الكثير من الأعمال المبكرة والمتعلقة بالبرمجة الخطية قد تطورت وازدادت بسبب الحاجة التخطيطية للقوة الجوية الأمريكية والتي أدركت المساهمات الهامة للبرمجة

الخطية خلال الحرب العالمية الثانية. إضافة لذلك فقد ساهم كوبمانز (T.C. Koop-mans) في التعريف بمساهمات نماذج البرمجة الخطية المحتملة ولا سيما نماذج النقل منها، وتوجيه اهتمامات الاقتصاديين لها.

إن أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية قد تم من قبل الاقتصادي جورج ستجلر (George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، وقد هدف جورج من ذلك التطبيق إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكاليف ممكنة.

لقد صاغ جورج في ذلك الوقت نموذج مشكلة برمجة خطية والذي لم يكن له وسيلة حل معروفة آنذاك. وقد توصل جورج ومساعده وبالاعتماد على مبادئ الاقتصاد والتخمين الشخصي إلى مكونات للغذاء اليومي قريبة جداً من تلك التي تم التوصل إليها باستخدام طريقة البرمجة الخطية كما وضعها دانتزغ.

تعريف البرمجة الخطية:

يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها عبارة عن طريقة أو أسلوب رياضي يستخدم للمساعدة في التخطيط واتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة وذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن كلمة برمجة (Programming) ليست لها علاقة ببرمجة الحاسوب ولكنها كلمة مرادفة للتخطيط وتعني وضع المشكلة بصيغة رياضية أو نموذج رياضي وحلها. وبناء على ذلك فإن البرمجة الخطية تتضمن تخطيط الأنشطة للحصول على نتائج أمثل. وبمعنى أوسع فإن هذا المصطلح يعني أيضاً التنفيذ المنظم والأفضل للأعمال.

أهداف الفصل:

يهدف هذا الفصل إلى تحقيق ما يأتي:

1- استعراض سريع لأوجه استخدامات البرمجة الخطية.

2- توضيح الاحتياجات والافتراضات الرئيسية لمشكلة البرمجة الخطية.

3- توضيح كيفية استخدام طريقة الرسم لحل البرمجة الخطية وسواء كانت تهدف إلى تعظيم الأرباح أو تخفيض التكاليف.

4- استعراض الحالات الخاصة المتعلقة بهذه الطريقة.

2-3 استخدامات البرمجة الخطية:

إن استخدامات البرمجة الخطية قد اتسعت لتشمل معظم نواحي الحياة سواء أكان ذلك في القطاع العام أو الخاص، في مؤسسة إنتاجية أو خدمية، وهادفة للربح أم غير هادفة، والأمثلة الآتية تعطي فكرة سريعة عن أوجه استخدام البرمجة الخطية.

1- أحد مدراء المصانع يرغب في وضع جدول الإنتاج وتحديد سياسة المخزون بالشكل الذي يعمل على إشباع الطلب في المستقبل وكذلك تقليل أو تخفيض مجموع كلف الإنتاج والتخزين إلى حدها الأدنى. علماً بأن هذا المدير قد فرضت عليه قيود متعلقة بالطلب وكذلك بالطاقة الإنتاجية المتاحة.

2- محلل مالي يريد أن يحدد مكونات المحفظة المالية وبالشكل الذي يؤدي إلى زيادة العائد على الاستثمار. ويمكن تصور المبلغ الكلي المخصص للاستثمار والمبلغ المخصص للاستثمار في كل من الأسهم والسندات، كقيود على المحلل.

3- يرغب مدير التسويق في إحدى الشركات في تحديد كيفية توزيع ميزانية الإعلان المحددة بين البدائل المتعلقة بوسائل الإعلان المختلفة مثل الراديو، والتلفزيون، والجرائد، والمجلات بحيث أن هذا التوزيع يؤدي إلى اختيار وسائل الإعلان التي تؤدي إلى تعظيم تأثير الإعلان (زيادة الطلب). حيث تمثل الميزانية وتوفر وسائل الإعلان المختلفة قيوداً على مديرالتسويق.

4- إحدى الشركات لها مخازن في مناطق متعددة وترغب في سد احتياجات مناطق مختلفة من محتويات هذه المخازن. وهنا نواجه مشكلة إشباع طلبات المناطق من المخازن المختلفة وبأقل تكلفة ممكنة. والقيود هنا هي احتياجات المناطق والكميات المعروضة أو المتوفرة في المخازن.

3-3 متطلبات أو خصائص مشكلة البرمجة الخطية:

Properties (Requirements) of Linear Programming Problem

1- وجود هدف واضح ومحدد بحيث يمكن تمثيله بمعادلة رياضية، وغالباً ما تكون هذه الأهداف متعلقة بزيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف.

2- وجود محددات أو قيود لا نستطيع تجاوزها. فعلى سبيل المثال فإن عدد الوحدات التي ستنتجها من منتج معين يتحدد بعدد ساعات العمل المتوفرة وإن اختيار السياسة

الإعلانية أو مكونات المحفظة المالية يتحدد في الغالب في ضوء المبالغ المتاحة لنا والمهيأة للاستثمار. ولهذا فإننا نسعى لتحقيق هدف معين ضمن شروط أو قيود معينة.

3- توفر عدد من البدائل للاختيار من بينها. فعلى سبيل المثال فإن الشركة التي تنتج أربع منتجات قد تستخدم البرمجة الخطية لمساعدتها في توزيع المصادر المتاحة بين هذه المنتجات واختيار المنتج أو المزيج من المنتجات الذي يؤدي إلى التحقيق الأمثل للأهداف. كذلك فإن الشركة الزراعية قد تستخدم البرمجة الخطية لتحديد المنتجات أو المحاصيل المختلفة أو توزيع الموراد المتاحة بين المنتجات المختلفة.

4- التعبير عن دالة الهدف والقيود في مشاكل البرمجة الخطية بمعادلات أو متباينات خطية أو مستقيمة، أي أن تكون المعادلات أو المتباينات من الدرجة الأولى، فعلى سبيل المثال فإن المعادلات والمتباينات الآتية هي معادلات أو متباينات خطية.

تعظيم ر = 9 س^{1} + 6 س^{2} + 10س^{3}

مقيدين بما يأتي:

2 س^{1} + 3 س^{2} + 0س^{3} = 10

3س^{1} + 5 س^{2} + 0س^{3} = 20

أما المعادلة الآتية فهي معادلة غير خطية وذلك لأن س1 ليست من الدرجة الأولى وإنما هي من الدرجة الثانية أي تربيعية.

س^{2} 1 + 3 س^{2} = 30

افتراضات البرمجة الخطية Assumptions of Linear Programming

ويقصد بالافتراضات هنا الشروط العلمية الأساسية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية. ويمكن القول بأن هناك خمس افتراضات أولية لمشكلة البرمجة الخطية يمكن تلخيصها كما يأتي:

1- **التأكد** Certainty

ويعني ذلك أن الأرقام الموجودة في دالة الهدف "مساهمات العوامل" والمحددات أو القيود "احتياجات العوامل والمصادر المتوفرة" معروفة وثابتة وغير قابلة للتغير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث.

2- التناسبية Proportionality

ويعني ذلك أن كل نشاط قد يعتبر مستقلاً عن الآخر، ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع مساهمات العوامل المختلفة. كذلك فإن الكميات التي يتم استخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد.

فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة الصنع من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج وهذا الإفتراض هو أساس افتراض الإضافية.

3- الإضافية Additivity

ويعني هذا الإفتراض أنه لا يوجد تداخل بين الفعاليات أو الأنشطة المختلفة. وبناء على ذلك فإن هذا الافتراض يتضمن ما معناه أنه لو أخذنا مستويات أو جوانب النشاط (س1 س2،.... س ن) فإن الاستعمال الكلي ولكل مصدر وكذلك معيار الإنجاز الكلي الناتج عن هذه الأنشطة يساوي مجموع الكميات المتولدة أو الناجمة عن كل النشاطات الفردية وبشكل مستقل. فإذا كنا ننتج أربعة منتجات وكان الربح الناجم عن بيع وحدة واحدة من كل من هذه المنتجات هو 8, 10,12,6 دنانير على التوالي، فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج وبيع ثلاث وحدات من كل منتج هو (6+12+10+8)3=108 دنانير.

4- قابلية القسمة أو الكسرية Divisibility or fractionality

والمقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، وهذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار. وإذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة الصحيحة أو الرقمية Integer Programming.

5- اللاسلبية No negativity

وهذا يعني أن قيم عوامل أو متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة "غير سالبة" فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة. فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان أو المصابيح الكهربائية أو إطارات السيارات أو غيرها.

4-3 محددات البرمجة الخطية Limitations of linear Programming

بالرغم من أن البرمجة الخطية قد أثبتت أنها وسيلة جيدة لحل المشاكل الكبيرة والمعقدة في القطاعين الخاص والعام، إلا أن هنالك بعض المحددات عليها والتي يمكن تلخيصها بما يأتي:

1- لا يوجد ضمان في الحصول على قيم أو أرقام صحيحة للمتغيرات باستخدام البرمجة الخطية. فعلى سبيل المثال فقد يتضمن الحل 5.3 وحدة ولكن المدير يستطيع شراء أو إنتاج 6 وحدات أو 5 وحدات ولكن ليس 5.3 وحدة. وفي بعض الحالات التي تدور حول افتتاح مصنع أو فرع جديد، (حيث تكون قيمة المتغير صفر أو واحد) فإن الوصول إلى إجابة كسرية قد لا يعني شيء. ولحسن الحظ ولحالات كهذه فإنه يمكن استخدام البرمجة الصحيحة.

2- المحدد الثاني يتمثل بعدم السماح بحالة عدم التأكد Uncertainty في البرمجة الخطية ذلك أن نموذج البرمجة الخطية يفترض المعرفة التامة بمساهمات العوامل، واحتياجاتها وكذلك المصادر المتاحة، علماً بأن هذه القيم قد لا تكون معروفة في الواقع. ولحل هذه المشكلة فهناك وسائل أخرى يمكن استخدامها كالبرامج الخطية في حالة عدم التأكد أو برمجة الفرصة المحددة. Linear Programming Under Uncertainty of Chance Constrained Programming.

3- أما المحدد الثالث فهو يتعلق بافتراض العلاقات الخطية أو المستقيمة فيما يتعلق بدالة الهدف والقيود. ذلك أنه وفي بعض الحالات العملية فإن علاقة دالة الهدف والقيود بالمتغيرات ليست خطية. وعلى ذلك فإن الوسيلة الأفضل لمعالجة مثل هذه المشاكل هي البرمجة اللاخطية Nonlinear Programming

هذه المحددات تشير إلى أنه لا يمكن استخدام البرمجة الخطية لحل كل المشاكل التي تواجه المؤسسات، ولكن وبرغم هذه المحددات فإن البرمجة الخطية تعتبر وسيلة مفيدة وقوية لحل المشاكل التي تتوفر فيها احتياجات وافتراضات البرمجة الخطية. وحتى في تلك الحالات التي لا تتوفر فيها شروط تطبيق البرمجة الخطية، فإن أساليب حل هذه الحالات لا تختلف كثيراً في مضمونها عن أساليب حل البرمجة الخطية. هذا مع الأخذ بعين الاعتبار إدخال التعديلات اللازمة بما يتفق وشروط الحالات المختلفة.

3-5 صياغة مشكلة البرمجة الخطية:

Formulation of Linear Programming Problem

إن أحد الاستخدامات الشائعة للبرمجة الخطية هو تحديد المزيج الإنتاجي Product Mix Problem. وتحدث هذه الحالة عند وجود منتجين أو أكثر تتنافس على كميات محددة من الموارد (قوى عاملة، مكائن، مواد أولية، أموال، مساحات ...الخ). فإذا كان هدف المنشأه هو تحقيق أعلى ربح ممكن، فإنها يجب أن تحدد الكميات التي ستنتجها من كل منتج أو ما يسمى بالمزيج الإنتاجي من أجل تحقيق ذلك الهدف. ومن أجل الوصول إلى ذلك فإنه لا بد وأن تتوفر كافة المتطلبات اللازمة لمسائل البرمجة الخطية ومن ثم صياغتها بالشكل الرياضي المناسب تمهيداً لحلها.

وفيما يأتي مثال توضيحي لمشكلة المزيج الإنتاجي وكيفية صياغتها وفقاً لأسلوب البرمجة الخطية.

مثال (1):

افرض أن الشركة الوطنية لصناعة الأثاث تواجه مشكلة تتعلق بوجود فائض في طاقتها الإنتاجية وبشكل أسبوعي وكما يأتي:

خمس عشرة ساعة في شعبة النجارة.

عشر ساعات في شعبة الإكمال أو التجميع.

وقد برز التساؤل أمام إدارة الشركة، "ماذا نعمل بهذه الطاقة الإنتاجية الفائضة؟"

افرض أنه وبالتعاون مع أحد خبراء السوق توفرت لدى إدارة الشركة معلومات تفيد بإمكانية استخدام هذه الطاقة الفائضة في إنتاج منتجين جديدين هما مكاتب صغيرة وكراسي، وأن كلاً من هذين المنتجين سيمر بالشعبتين الصناعيتين. فلو افترضنا أنه ونتيجة للدراسة والبحث قد توفرت المعلومات الآتية والمتعلقة باحتياجات كل منتج من كل شعبة من الشعب الصناعية.

جدول (3-1): احتياجات المنتجات المختلفة من الشعب الصناعية والوقت المتوفر لدى كل شعبة من هذه الشعب

الشعبة	المنتج		الوقت المتوفر في الشعبة بالساعات
	مكاتب	كراسي	
النجارة	3 ساعات	5 ساعات	15 ساعة
الإكمال أو التجميع	5 ساعات	2 ساعة	10 ساعات
الربح المتوقع للوحدة الواحدة	5 دنانير	3 دنانير	

الآن على الإدارة أن تحدد عدد الوحدات التي ستنتجها من كل نوع وذلك لتعظيم أرباحها، آخذة بعين الاعتبار عدد الساعات المتاحة في كل شعبة حيث أنها تمثل المحددات في هذه المشكلة.

افرض أن $س_1$ = عدد الوحدات المنتجة من المكاتب الصغيرة وأن

$س_2$ = عدد الوحدات المنتجة من الكراسي.

وأن:

ر= الربح الإجماي المتوقع

الآن يمكن لنا أن نمثل هدفنا بمعادلة تشمل س1 و س2 وعلى الشكل الآتي:

تعظيم ر= $5س_1+3س_2$ (دالة الهدف).

والخطوة الآتية تتمثل في وضع قيود وتوضيح العلاقات الرياضية المتعلقة بها.

إن الإستخدام من المصادر يجب أن يكون مساوياً أو أقل من المصادر المتاحة، وهذه تمثل إحدى العلاقات العامة للقيود في حالة تعظيم الأرباح. فعلى سبيل المثال وفيما يتعلق بشعبة النجارة فإن الوقت الكلي الذي يمكن استخدامه هو:

3 ساعات لكل مكتب × عدد المكاتب المنتجة+ 5 ساعات لكل كرسي× عدد الكراسي المنتجة.

ويمكن تمثيل القيد الأول وكما يأتي:

$3س_1+5س_2 \geq 15$

أما فيما يتعلق بشعبة الإكمال أو التجميع فإن الوقت الكلي الذي يمكن استخدامه هو:

5 ساعات لكل مكتب × عدد المكاتب المنتجة +2 ساعة لكل كرسي × عدد الكراسي المنتجة.

ويمكن تمثيل البند الثاني كما يأتي:

5س$_1$ + 2س$_2$ ≥ 10

وأخيراً فإنه لا بد من تثبيت قيد اللاسلبية والذي يمكن تمثيله كما يأتي:

س$_1$، س$_2$ ≤ 0

مما تقدم نلاحظ أن قيود المصادر تمثل القيود على الطاقة الإنتاجية والتي بدورها تؤثر على الربح، فعلى سبيل المثال وفيما يتعلق بمثالنا فإنه لا يمكن للشركة إنتاج عشرة كراسي لأن في ذلك تعارضاً مع كلا القيدين.

6-3 الشكل العام لنموذج البرمجة الخطية: A Standard of The LP Model

بناء على الصياغة السابقة للمثال يمكن صياغة النموذج العام لمشكلة توزيع المصادر المتاحة بين الأنشطة المختلفة. وبشكل خاص فإن هذا النموذج يهدف إلى المساعدة في تحديد قيم المتغيرات المختلفة التي تحويها المشكلة وذلك كما يلي:

تعظيم ر = ب^1 س$_1$ + ب^2 س$_2$ + ب^3 س$_3$ ..... ب ن س ن دالة الهدف

مقيدين بما يأتي

أ 11 س$_1$ + أ 21 س$_2$ + أ 31 س$_3$ + ... + أ 1 ن س ن ≥ ك^1 قيود المصادر

أ 12 س$_1$ + أ 22 س$_2$ + أ 32 س$_3$ + ... + أ 2 ن س ن ≥ ك^2

أ 13 س$_1$ + أ 23 س$_2$ + أ 33 س$_3$ + ... + أ 3 ن س ن ≥ ك^3

⋮

أ م$_1$س$_1$ أم$_2$ س$_2$ + أم$_3$ س$_3$ + ... أ م ن س ن ≥ ك م

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، ..... س ن ≤ .] قيد اللاسلبية

حيث أن الدالة التي نهدف إلى تعظيمها تسمى بدالة الهدف. أما القيود فهي وكما

نلاحظ من النموذج أعلاه تتكون من نوعين: الأول يتعلق باستخدام المصادر وهي تشمل القيود الأربعة الأولى، أما النوع الثاني فهي قيد اللاسلبية والممثل بالقيد الأخير.

هذا النموذج يتعلق بتعظيم الأرباح وكما نلاحظ، لكن إذا أردنا تخفيض التكاليف فإن الشكل العام للنموذج هو:

تخفيض ر = ب1 س1 + ب2س2 + ب3س3 + ... + ب ن س ن]

مقيدين بما يأتي:

أ 11 س$_1$ + أ 21 س$_2$ + أ 31 س$_3$ + ... + أ 1 ن س ن ≤ ك^1

أ 12 س$_1$ + أ 22 س$_2$ + أ 32 س$_3$ + ... + أ 2 ن س ن ≤ ك^2 قيود المصادر

أ 13 س$_1$ + أ 23 س$_2$ + أ 33 س$_3$ + ... + أ 3 ن س ن ≤ ك^3

.
.
.

أ 12 س$_1$ + أ 22 س$_2$ + أ 32 س$_3$ + ... + أ 2 ن س ن ≤ ك م

س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، ..... س ن ≤ .] قيد اللاسلبية

7-3 طرق حل مشاكل البرمجة الخطية Solution of (LP) Problems

هناك عدة طرق يتم بواسطتها حل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد استخدام إحدى هذه الطرق دون غيرها على طبيعة وحجم المشكلة موضوع البحث، أو رغبة الجهة متخذة القرار. ومن أهم هذه الطرق ما يأتي:

1- الطريقة الجبرية Algebric Method

ويتم حل المشكلة اعتماداً على هذه الطريقة على أساس أنها مجموعة من معادلات الدرجة الأولى. والمأخذ الرئيسي على هذه الطريقة هو عدم قدرتها على معالجة المشاكل الكبيرة ذات المتغيرات أو القيود المتعددة.

2- طريقة الرسم Graphical Method

وبموجب هذه الطريقة نقوم برسم المحاور (اثنين على الغالب) الممثلة للمتغيرات وبعد ذلك نقوم برسم الخطوط الممثلة للقيود بعد تحديد النقاط الممثلة للمتغيرات على المحاور، ومن ثم نقوم بتحديد منطقة الحل الممكن وتحديد وتقييم نقاط هذا الحل لاختيار أفضلها.

ومن المآخذ على هذه الطريقة أن قدرتها التحليلية محدودة، وأنها صعبة الاستخدام إن لم تكن مستحيلة في الحالات التي يكون فيها عدد المتغيرات كبيراً.

3- **الطريقة المبسطة** The Simplex Method

وتعتبر هذه الطريقة أكثر الطرق انتشاراً، ويعود السبب في ذلك إلى قدرتها على معالجة المشاكل الكبيرة والمعقدة. وقد ساعد التقدم الفني في مجال أنظمة وبرامج الحاسوب المتعلقة بهذا الموضوع في زيادة قدرة وفاعلية هذه الطريقة.

وسوف يتم التركيز هنا على طريقة الرسم والطريقة المبسطة على اعتبار أن الطلبة قد ألفوا استخدام الطريقة الجبرية في مراحل سابقة من دراستهم.

8-3 طريقة الرسم The Graphical Method

تمثل هذه الطريقة وسيلة سهلة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي لا تزيد متغيراتها عن اثنين في الغالب. وبالرغم من ذلك فإنها تبقى إحدى الطرق المفيدة واللازمة. حيث أن دراستها وفهمها يساعدان في توضيح وفهم بعض المفاهيم المتقدمة والتي ستشرح مؤخراً في هذا الكتاب، كالطريقة المبسطة مثلاً.

وتتكون عملية الحل بطريقة الرسم من عدد من الخطوات التي لا بد من مراعاة تسلسلها للوصول للحل النهائي وهي:

- رسوم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة وتسميتها.
- رسم الخطوط الممثلة للقيود.
- رسم عدد من الخطوط الممثلة لدالة الهدف.
- إيجاد القيم المصاحبة لزوايا الحل الممكن.
- تحديد الحل الأمثل.

1-8-3 تعظيم الأرباح:

فيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على المثال رقم (1) والمتعلق بتعظيم الأرباح:

أ- رسم الخط الممثل للقيد الأول:

فبعد رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة (شكل رقم 1) نقوم برسم الخط الممثل للقيد

الأول وذلك بعد تحويل علامة عدم التكافؤ 3س1+5س2 = 15 إلى علامة 3س+5س=15. ولما كان القيد الأول ممثلاً بمعادلة خطية فإنه يمكن تمثيله بخط مستقيم. وأسهل طريقة لرسم الخط هو إيجاد نقطتين تفيان بالمعادلة، ثم إيصالهما بخط مستقيم، وأسهل نقطتين يمكن إيجادهما هما النقطتان اللتان تتقاطعان مع محوري المشكلة.

فعندما لا تنتج الشركة أي مكتب ($س_1 = 0$) فإن ذلك يعني أن:

$$3\ (0) + 5\ س_2 = 15$$

$$5\ س_2 = 15$$

$$س_2 = 3$$

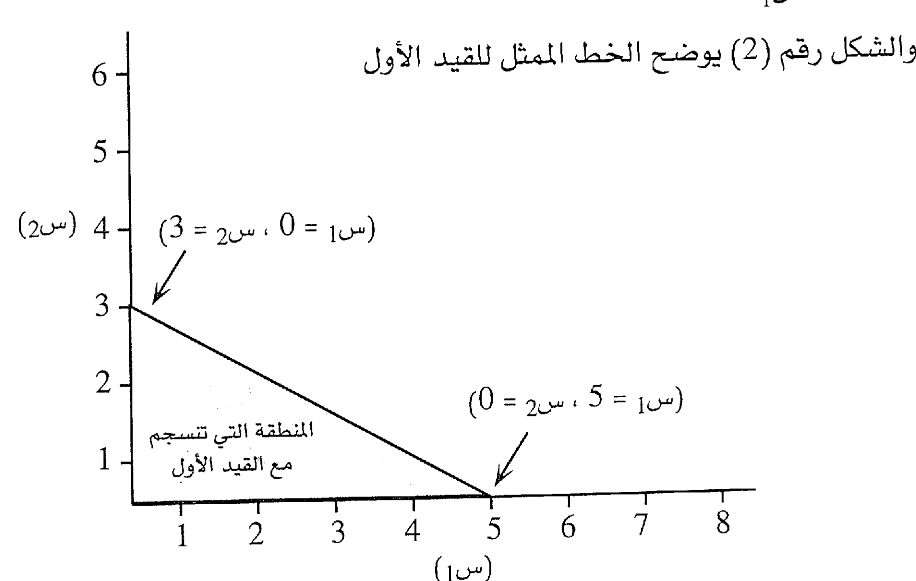
وعندما لا تنتج الشركة أي كرسي ($س_2 = 0$)، فإن هذا يعني أن:

$$3\ س_1 + 5\ (0) = 15$$

$$3\ س_1 = 15$$

$$س_1 = 5$$

والشكل رقم (2) يوضح الخط الممثل للقيد الأول



الشكل (3-2): الخط الممثل للقيد الاول

حيث أن المنطقة المظللة هي المنطقة المنسجمة مع القيد الأول. أي أن أي نقطة في هذه المنطقة أو على الخط الممثل للقيد تفي باحتياجات القيد الأول ولا تتعارض معه. أي يجب عدم تجاوز الخط الممثل للقيد.

ب- رسم الخط الممثل للقيد الثاني:

وذلك بعد تحويل علاقة عدم التكافؤ $5س_1+2س_2\leq10$، إلى علاقة تكافؤ $5س_1+2س_2=10$، وإيجاد النقاط الممثلة لهذا القيد بنفس الأسلوب الذي اتبعناه عند رسم القيد الأول، فإذا كنا لا ننتج مكاتب ($س_1=0$) فهذا يعني:

$$5\ (0) + 2\ س_2 = 10$$

$$2\ س_2 = 10$$

$$س_2 = 5$$

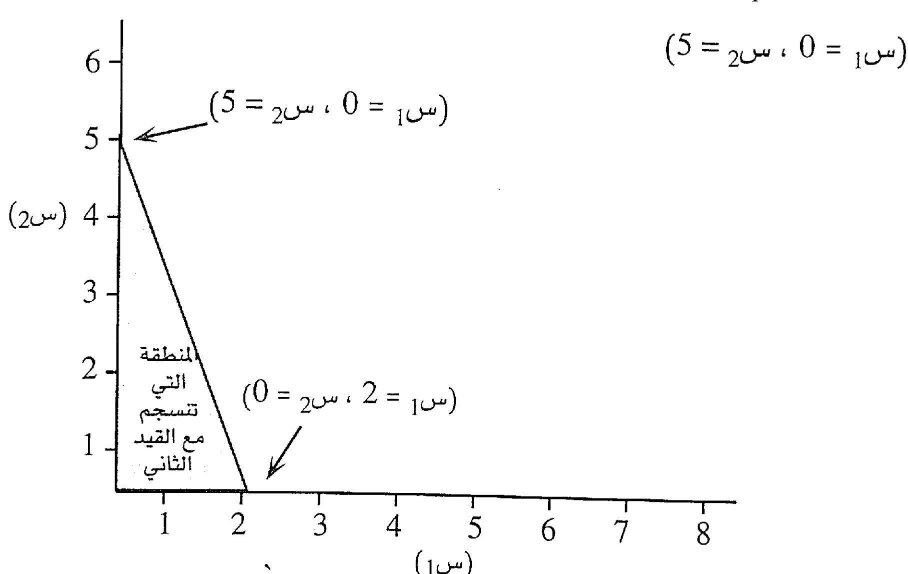
وعندما لا ننتج كراسي ($س2=0$) يكون:

$$5\ س_1 + 2\ (0) = 10$$

$$5\ س_1 = 10$$

$$س_1 = 2$$

($س_1 = 0$ ، $س_2 = 5$)

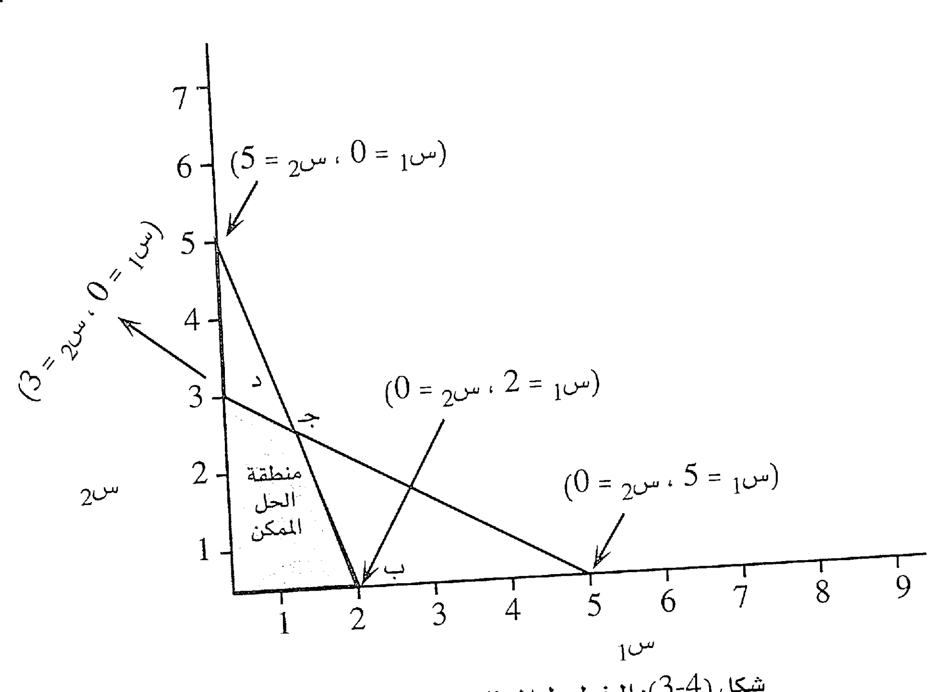


شكل (3-3): الخط الممثل للقيد الثاني

حيث يلاحظ من الشكل رقم (3) أن المنطقة المظللة هي المنطقة التي تنسجم مع القيد الثاني. أي أن أي نقطة في هذه المنطقة وشريطة أن لا تتجاوز الخط الممثل للقيد، تنسجم أو تفي باحتياجات هذا القيد.

ج- رسم القيدين معاً:

نحن نعلم أنه لإنتاج أي من المنتجين (مكاتب أو كراسي) فإنه لا بد من استخدام كلا الشعبتين، وفي مشكلة البرمجة الخطية فإننا نسعى لإيجاد الحلول المصاحبة للنقاط المختلفة والتي لا تتعارض مع متطلبات كافة القيود. وعلى ذلك لا بد من رسم القيدين معاً وفي شكل واحد تمهيداً لتحديد منطقة الحل الممكن والتي تنسجم مع القيدين، ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة، والشكل الآتي يمثل توضيحاً للخطوط الممثلة لقيدي المشكلة.



شكل (3-4): الخطوط الممثلة لجميع القيود

إن المنطقة المظللة والممثلة بالنقاط (أ،ب،جـ،د) هي الحلول التي لا تتعارض مع أي من قيود المشكلة، وهي تعرف بمنطقة الحل الممكن Area of Feasible Region، وأي نقطة تقع ضمن هذه المنطقة تمثل حلاً عملياً للمشكلة وأي نقطة خارج حدود هذه المنطقة تمثل حلاً غير ممكن.

لقد توصلنا ولغاية الآن إلى تحديد منطقة الحل الممكن، ولا بد من تحديد النقطة ضمن هذه المنطقة والتي تعطينا أفضل النتائج (الحل الأمثل) لهذه المشكلة ويمكن الوصول إلى الحل الأمثل باستخدام أي من الطريقتين الآتيتين:

أ- طريقة خطوط الربح المتكافئة Iso- Profit Lines Method

ب- طريقة نقاط الزوايا The Corner Point Method

أ- طريقة خطوط الربح المتكافئة Iso- Profit Lines Method

بعد إيجاد الحل الممكن، لا بد من إيجاد الحل الأمثل. حيث أن الحل الأمثل يقع على إحدى النقاط التي تقع ضمن الحل الممكن والتي تؤدي إلى أعلى الأرباح. أي أن الحل الأمثل هو عبارة عن الحل الممكن الذي يعطي أفضل النتائج.

وتقوم هذه الطريقة على أساس افتراض أن الربح يساوي رقماً معيناً وبشكل عشوائي. ومن ثم رسم الخط الممثل للمعادلة. وبتكرار هذه العملية نقوم برسم خطوط ربح أخرى. افرض أننا اخترنا أن يكون الربح مساوياً إلى 15 ديناراً، فإنه يمكن كتابة دالة الهدف كما يأتي:

$$5س_1 + 3س_2 = 15$$

ونمثل هذه المعادلة بمعادلة الخط المستقيم وتسمى بخط الربح المتكافئ وهي تمثل كل قيم $س_1$ ، $س_2$ والتي تحقق ربحاً قدره 15 ديناراً ويمكن رسم هذا الخط بنفس طريقة رسم الخطوط الممثلة للقيود.

عندما يكون $س_1 = 0$، ينتج

$$5(0) + 3س_2 = 15$$

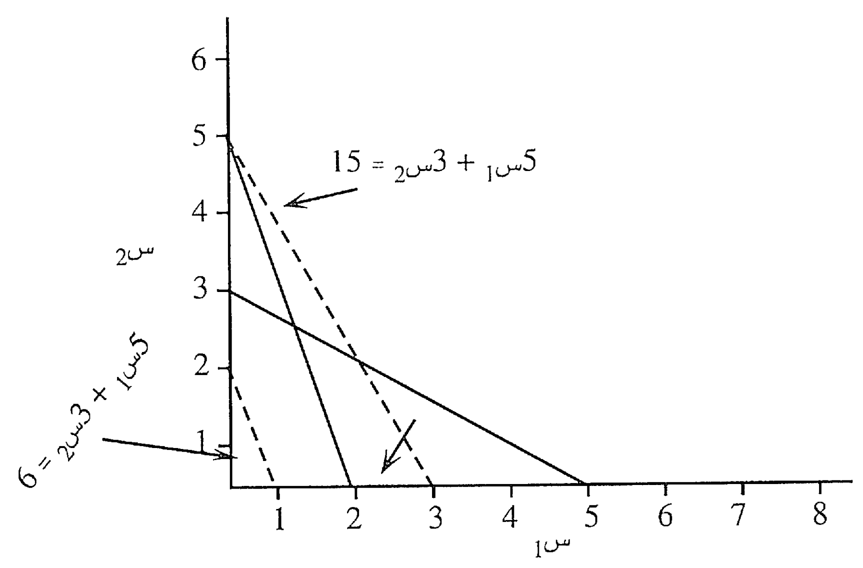
$$س_2 = 5$$

وعندما يكون $س_2 = 0$ يكون

$$5س_1 + 3(0) = 15$$

$$س_1 = 3$$

وبعدها نقوم برسم الخط (المتقطع) الذي يربط بين هاتين النقطتين كما هو موضح في الشكل رقم (5).



شكل (3-5) : يبين خط الربح المتكافئ بربح قدره 15 و6 دنانير

نلاحظ من الشكل أعلاه أنه لا يمكن تحقيق ربح قدره 15 دينار، ذلك أن خط الربح الممثل لهذه المعادلة يقع خارج منطقة الحل الممكن، وهذا يعني أنه لا بد من افتراض رقم آخر للربح يقل عن الرقم السابق ورسم الخط الممثل له افرض الآن إننا اخترنا أن يكون الربح يساوي 6 دنانير.

$5س_1 + 3س_2 = 6$

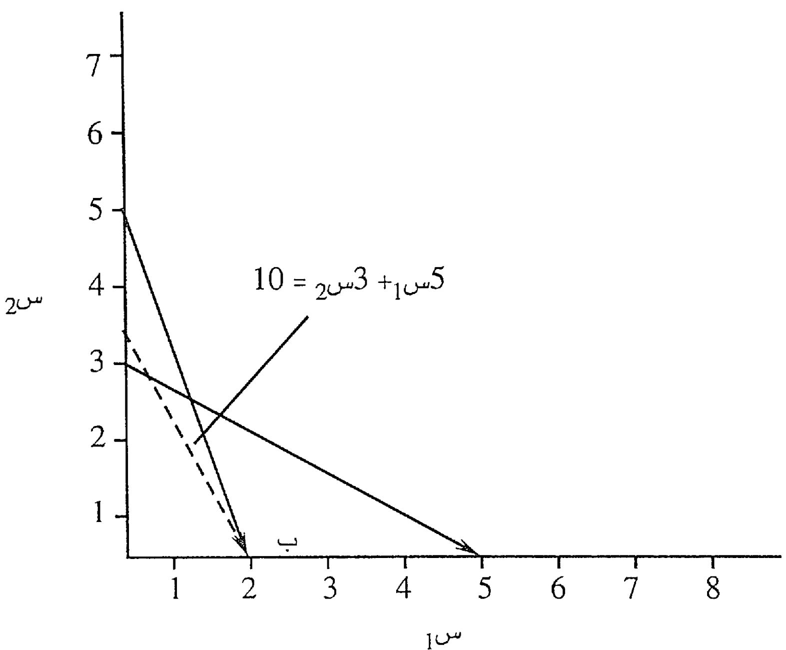
$س_1 = 0$

$س_2 = 2$

$س_1 = 1,2$

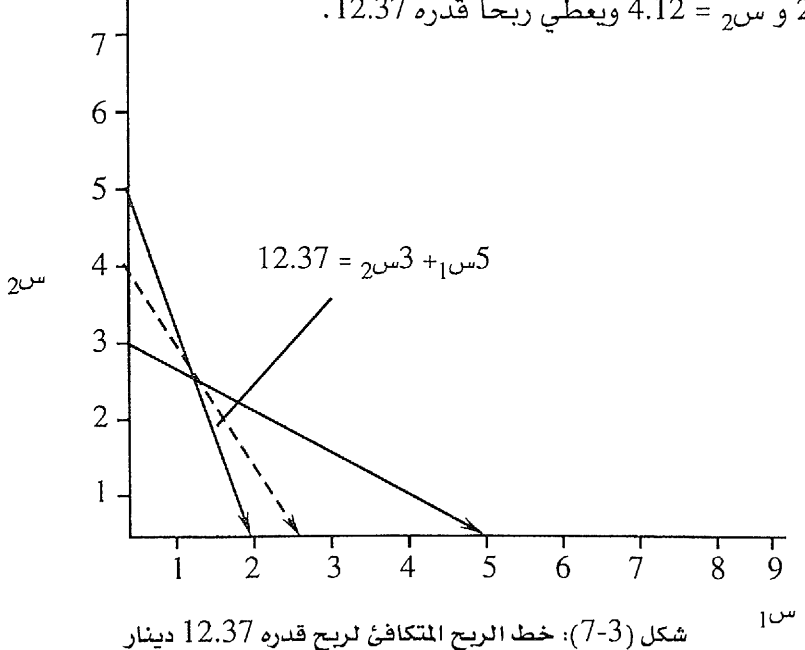
وبعد رسم الخط الممثل لهذا الربح وكما هو موضح في الشكل السابق نلاحظ أن خط الربح المتكافئ لربح قدره ستة دنانير لا يعطينا الربح الأعلى.

افرض الآن أننا جعلنا الربح يساوي 10 دنانير ورسمنا الخط الممثل له وكما يوضح الشكل رقم (6).



شكل (3-6): خط الربح المتكافئ لربح قدره 10 دنانير

حيث يلاحظ أيضاً أن هذا الخط لا يعطينا الربح الأعلى. أخيراً فإن الخط الممثل لأعلى ربح ممكن قد بين في الشكل رقم (7) حيث يلامس منطقة الحل الممكن على النقاط س$_1$= 2.47 و س$_2$ = 4.12 ويعطي ربحاً قدره 12.37.



شكل (3-7): خط الربح المتكافئ لربح قدره 12.37 دينار

حيث يلاحظ أن هذا الخط يعطي أعلى الأرباح الممكنة. وكما نلاحظ فقد لامس منطقة الحل الممكن في نقطة (جـ).

مما تقدم نلاحظ أن خطوط الربح المتكافئة لها الخصائص الآتية:

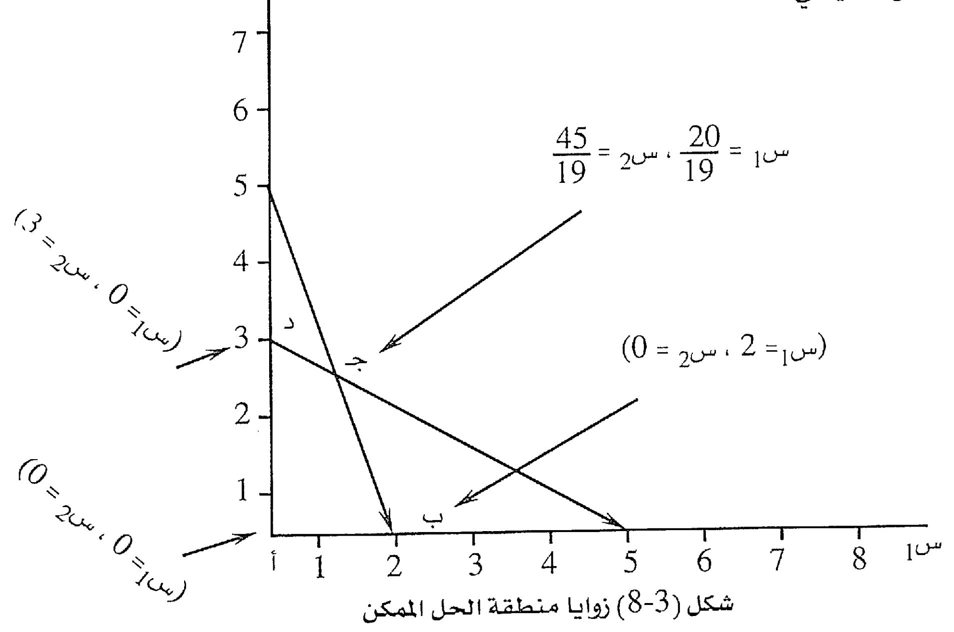
1- إنها جميعاً متوازية.

2- أن خطوط الربح التي تمثل ربحاً عالياً تقع إلى اليمين وفوق خطوط الربح التي تمثل ربحاً أقل، وبكلمة أخرى فإنه وكلما ابتعدنا عن نقطة الأصل (الصفر) كلما زاد الربح وكلما اقتربنا منها كلما قل الربح.

ب- طريقة نقاط الزوايا The Corner Point Solution Method

تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع من طريقة خطوط الربح، وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد الربح الذي يمكن الحصول عليه في كل زاوية من زوايا منطقة الحل الممكن. ذلك أن النظرية الرياضية التي تعتمد عليها البرمجة الخطية تقول بأن الحل الأمثل يقع على إحدى زوايا الحل الممكن. ولهذا فإنه من الضروري إيجاد القيم الربحية عند كل من هذه الزوايا. والحل الأمثل يقع على واحدة أو أكثر من هذه الزوايا.

إذا نظرنا إلى الشكل رقم (8) نجد أن زوايا الحل الممكن هي أ،ب،جـ،د، حيث نقوم بإيجاد معاملات $س_1$ و$س_2$ على كل زاوية من زوايا الحل الممكن ومن ثم بإيجاد الربح المصاحب لها وكما يأتي:



شكل (3-8) زوايا منطقة الحل الممكن

النقطة والزاوية	معاملات $س_1$ و $س_2$	الربح المتحقق وتعويض قيم $س_1$ و $س_2$ بالمعادلة ر= $5س_1 + 3س_2$
أ	$س_1 = 0$ ، $س_2 = 0$	$5(0) + 3(0) = 0$
ب	$س_1 = 2$ ، $س_2 = 0$	$5(2) + 3(0) = 10$
جـ	$س_1 = 19/20$ ، $س_2 = 19/45$	$5(19/2) + 3(\frac{45}{19}) = \frac{235}{19}$
د	$س_1 = 0$ ، $س_2 = 3$	$5(0) + 3(3) = 9$

حيث يلاحظ أن نقطة جـ هي نقطة الحل الأمثل، وذلك أن الربح المتحقق على هذه النقطة هي أعلى الأرباح الممكنة لهذه الشركة (19/235) وهذا هو الحل الأمثل حيث:

$$س_1 = \frac{20}{19} ، س_2 = \frac{45}{19}$$

وقيمة الحل الأمثل = $\frac{235}{19}$

لقد توصلنا إلى معاملات $س_1$ و $س_2$ عند النقطة جـ وذلك من خلال حل المعادلتين الممثلتين للقيود وكما يأتي:

$$5\ (3س_1 + 5س_2 = 15)$$

$$5\ (5س_1 + 2س_2 = 10)$$

أي نقوم بضرب المعادلة الأولى في (5) والثانية في (3). وبعد طرح المعادلة الثانية من الأولى نحصل على ما يلي:

$$15س_1 + 25س_2 = 75$$

$$-\ \ 15س_1 + 6س_2 = 30$$

$$+19س_2 = +45$$

$$س_2 = \frac{45}{19} = 2.37$$

$$3س_1 + (\frac{45}{19}) = 15$$

$$3س_1 + (\frac{225}{19}) = 15$$

$$3س_1 + (\frac{225 - 285}{19})$$

$$3س_1 = \frac{60}{19}$$

$$س_1 = \frac{20}{19} = 1.05$$

ملاحظات على طريقة الزوايا:

يمكن إيراد الملاحظات الآتية والمتعلقة بطريقة الزوايا:

1- تمثل نقاط الزوايا المتعلقة بمنطقة الحل الممكن نقاط التقاطع لخطين أو أكثر من خطوط منطقة الحل الممكن.

2- عدد الزوايا لأي منطقة حل ممكن محدودة.

3- الحل الأمثل لأي مشكلة يجب أن يقع على واحدة من هذه النقاط.

4- إذا حصل أن وقع الحل الأمثل على أكثر من نقطة، فإن هذا يعني أن لدينا أكثر من حل أمثل للمشكلة، وكلها تعطي نفس النتيجة لدالة الهدف، وفي مثل هذه الحالة يجب أن تكون نقطتا الحل الأمثل متجاورتين وعندها تكون أي نقطة تقع على الخط الواصل بين نقطتي الحل الأمثل هي أيضاً نقطة حل أمثل. وسوف يتم توضيح ذلك في الصفحات القادمة.

3-8-2 تقليل التكاليف The Minimization Problem

بدلاً من تعظيم الربح وكما عملنا في مثالنا السابق، فإننا هنا نسعى إلى تخفيض التكاليف. فعلى سبيل المثال فإن صاحب مزرعة للدواجن يريد تحديد الخلطة الغذائية للدواجن بالشكل الذي يضمن فيه نوعية غذاء جيد، وبأقل التكاليف لهذه الخلطة، كذلك فإن صاحب المصنع متعدد الفروع يرغب في توزيع منتجات هذه المصانع لأسواق مختلفة وبالشكل الذي يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل إلى حدها الأدنى.

ويمكن حل مشكلة تخفيض التكاليف بالرسم من خلال تحديد منطقة الحل الممكن ثم استخدام طريقة خطوط الكلفة المتكافئة أو طريقة الزوايا بهدف الوصول إلى الحل الأمثل.

مثال(2):

ينوي صاحب إحدى مزارع الدواجن شراء نوعين من أنواع الغذاء المخصص للدواجن،

ومزجها معاً للحصول على خلطة جيدة تمتاز بكلفة جيدة وغذاء جيد لدواجنه بنفس الوقت. كل نوع من النوعين المكونين للخلطة يحتوي بشكل كلي أو جزئي على المكونات اللازمة لتسمين الدواجن. فكل كيلو غرام من النوع الأول مثلاً يحتوي على 10 غرامات من مكون (أ) و5 غرامات من مكون (ب). وكذلك فإن كل كيلو غرام من النوع الثاني يحتوي على خمسة غرامات من مكون (أ) وعشر غرامات من مكون (ب). علماً بأن الكيلو غرام الواحد من النوعين الأول والثاني يكلف ما مقداره 20 قرشاً. ويرغب صاحب المزرعة في استخدام البرمجة الخطية لتحديد مزيج الخلطة الذي يؤدي إلى أقل التكاليف والتي تضمن توفير الاحتياجات الشهرية الدنيا الواجب توافرها. والجدول رقم (3-2) يبين المعلومات ذات العلاقة بهذه المشكلة.

جدول (3-2): مكونات الخلطة والاحتياجات منها

المكونات	مكونات الكيلو غرام من الغذاء (بالغرامات)		الحد الأدنى لاحتياجات الصوص الواحد (بالغرامات)
	النوع الأول	النوع الثاني	
أ	10	5	50
ب	5	10	40
الكلفة للكيلو غرام الواحد	20 قرشاً	20 قرشاً	

افرض أن $س_1$= عدد الكيلو غرامات التي اشتريت من النوع الأول.

افرض أن $س_2$= عدد الكيلو غرامات التي اشتريت من النوع الثاني.

الآن ونتيجة توفر هذه المعلومات يمكن لنا صياغة مشكلة البرمجة الخطية المذكورة وكما يأتي:

تخفيض ر= $20س_1 + 20س_2$

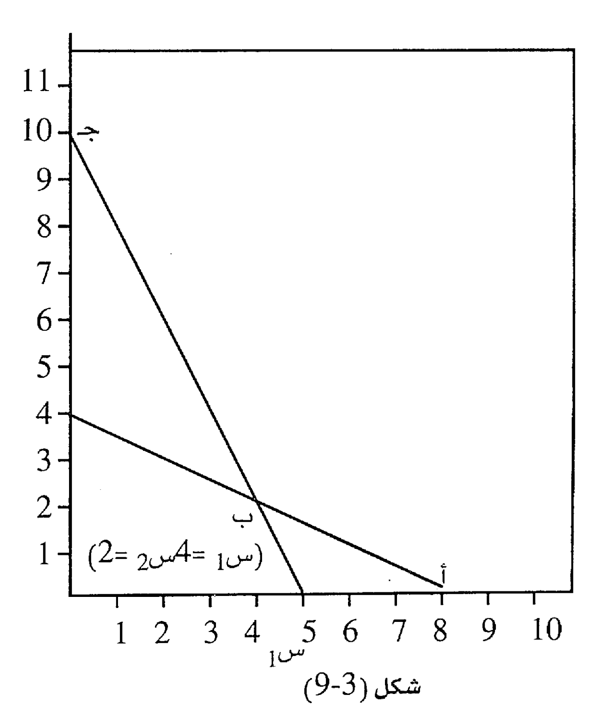
مقيدين بما يأتي:

$10س_1 + 5س_2 \geq 50$ (القيد المتعلق بمكون أ)

$5س_1 + 10س_2 \geq 40$ (القيد المتعلق بمكون ب)

س$_1$، س$_2$ ≤ . (القيد اللاسلبية)

أولاً: رسم الشكل الممثل لهذه المشكلة وذلك لتحديد منطقة الحل الممكن وكما يوضح الشكل رقم (9).



شكل (3-9)

أ) القيد الأول

15س$_1$ + 5س$_2$ = 50

س$_1$ = 0 ، س$_2$ = 10

س$_2$ = 0 ، س$_1$ = 5

ب) القيد الثاني

5س$_1$ + 10س$_2$ ≤ 40

س$_1$ = 0 ، س$_2$ = 4

س$_2$ = 0 ، س$_1$ = 8

يلاحظ من الشكل أعلاه أن المنطقة المظللة هي منطقة الحل الممكن وهي المنطقة التي تقع إلى الأعلى من نقاط الزوايا أ، ب، جـ.

إيجاد الحل الأمثل: بعد تحديد منطقة الحل الممكن لا بد من الاستمرار لإيجاد الحل الأمثل والذي تصاحبه أقل التكاليف، وذلك بطريقتي الزوايا وخطوط الكلفة المتكافئة.

1- إيجاد الحل الأمثل بطريقة الزوايا:

يتم ذلك كما اشرنا سابقاً من خلال إيجاد القيم المصاحبة لكل زاوية من زوايا الحل الممكن واختيار تلك النقطة التي تصاحبها أقل التكاليف.

وذلك كما يلي:

النقطة	معاملات المتغيرات	التكاليف
أ	$س_1 = 8$ ، $س_2 = 0$	$160 = (0) 20 + 8 \times 20$
ب	$س_1 = 4$ ، $س_2 = 2$	$120 = (2) 20 + 4 \times 20$
جـ	$س_1 = 0$ ، $س_2 = 10$	$200 = (10) 20 + (0) 20$

حيث يلاحظ أن نقطة ب هي النقطة المثلى – أي نقطة الحل الأمثل، ذلك أن التكلفة المصاحبة هي 120 وهي أقل التكاليف.

وقد تم تحديد معاملات $س_1$ و $س_2$ على النقطة ب من خلال حل المعادلتين بالقيود وكما يأتي:

$$10س_1 + 5س_2 = 50$$

$$-2\ (5س_1 + 10س_2 = 40)$$

$$10س_1 + 5س_2 = 50$$

$$-10س_1 - 20س_2 = -80$$

$$-15س_2 = -30$$

$$س_2 = \frac{30}{15} = 2$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى، نرى أن $س_1 = 4$

$$10س_1 + 5(2) = 50$$

$$10س_1 = 40$$

$$س_1 = 4$$

2- إيجاد الحل الأمثل باستخدام خطوط الكلفة المتكافئة

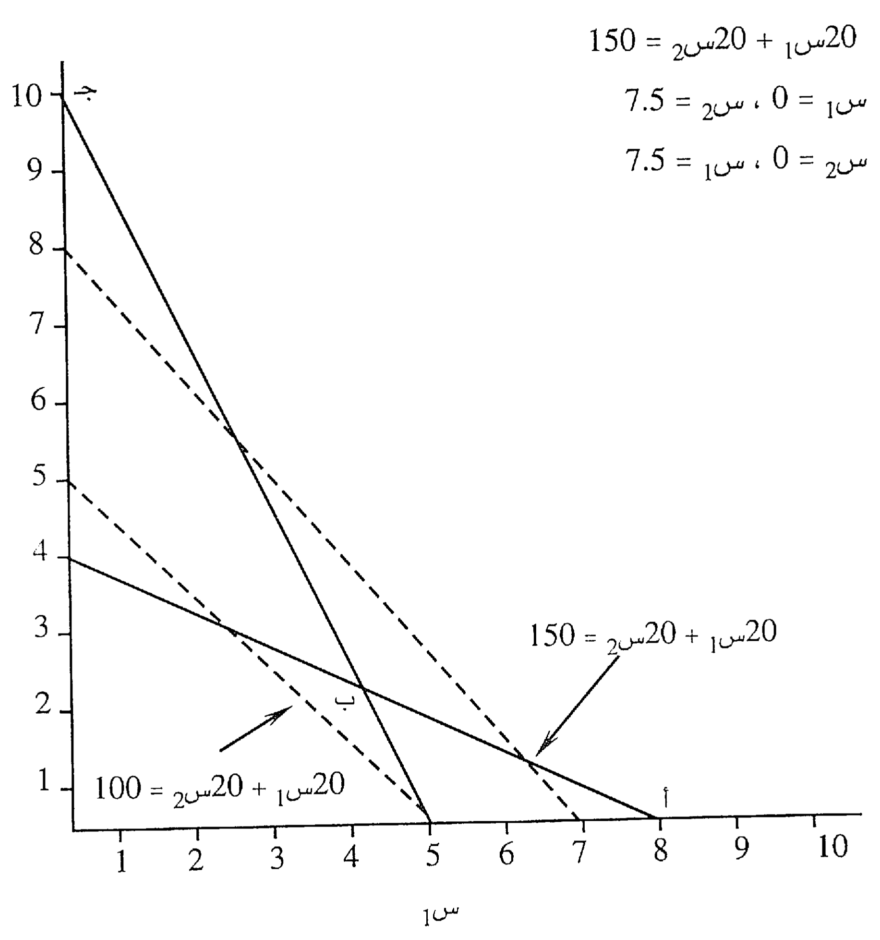
ويتم ذلك من خلال افتراض كلف مختلفة ورسم الخطوط الممثلة لكل كلفة وإلى أن نصل إلى رسم الخط الذي يصاحبه أقل التكاليف.

افرض أن الكلفة= 150 قرشاً

$20س_1 + 20س_2 = 150$

$س_1 = 0$ ، $س_2 = 7.5$

$س_2 = 0$ ، $س_1 = 7.5$



شكل (3-10): خطوط التكاليف للقيمتين الفرضيتين 150 و 100

يلاحظ من الخط الممثل لكلفة قدرها 150 أنه بالإمكان تخفيض هذه الكلفة، أي أن الكلفة البالغة 150 قرشاً ليست هي المثلى.

افرض أن الكلفة تساوي 100 قرشاً ،فإن:

$20س_1 + 20س_2 = 100$

$س_1 = 0$ ، $س_2 = 5$

$س_2 = 0$ ، $س_1 = 5$

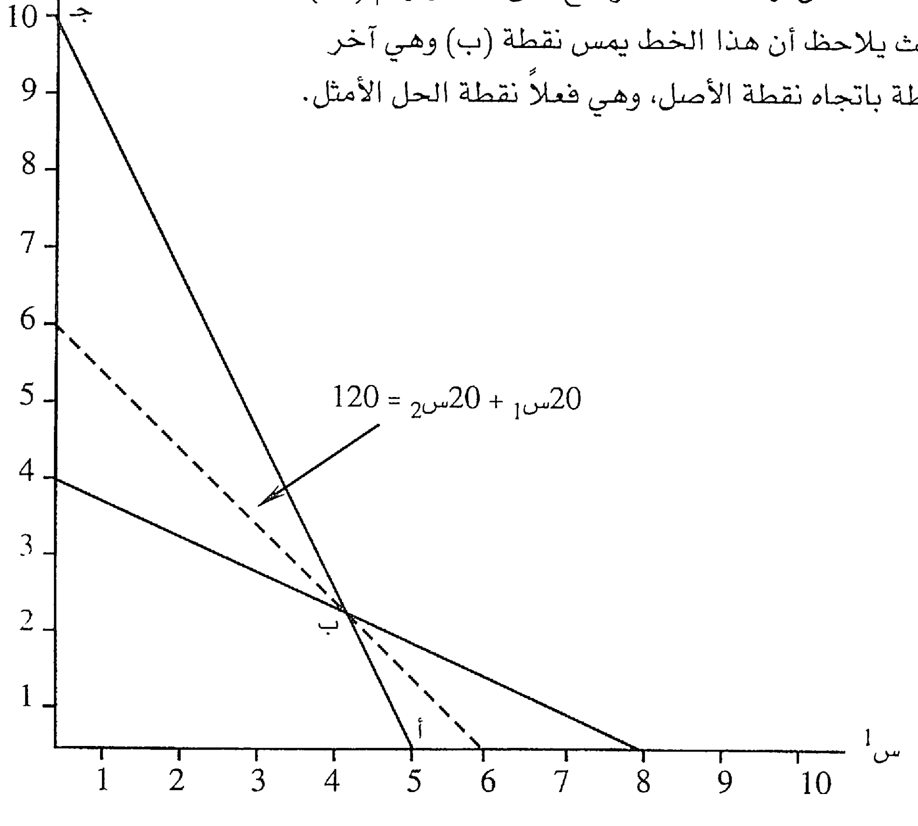
والخط الممثل لهذه المعادلة موضح أيضاً على الشكل رقم 10، حيث يلاحظ أن هذا الخط يقع خارج منطقة الحل الممكن، وبالتالي لا بد من رفع الكلفة قليلاً ولنفرض أننا اخترنا أن تكون قيمة هذه الكلفة 120 قرشاً، فإن هذا يعني أن:

$20س_1 + 20س_2 = 120$

$س_1 = 0$ ، $س_2 = 6$

$س_2 = 0$ ، $س_1 = 6$

والخط الممثل لهذه المعادلة موضح على الشكل رقم (11) حيث يلاحظ أن هذا الخط يمس نقطة (ب) وهي آخر نقطة باتجاه نقطة الأصل، وهي فعلاً نقطة الحل الأمثل.



شكل (3-11): خط الكلفة المتكافيء الممثل لكلفة قدرها 120 قرشاً

من الواضح أن هناك عدة نقاط في منطقة الحل الممكن والتي يمكن أن تؤدي إلى تخفيض التكاليف، ونحن نستمر بتحريك خطوطنا باتجاه الأسفل أي باتجاه نقطة الأصل. وآخر نقطة يمكن أن نلمسها وتقع في نفس الوقت في منطقة الحل الممكن هي نقطة ب. وهي نقطة الحل الأمثل. حيث أن معاملات $س_1$ و $س_2$ هي (2،4) على التوالي والكلفة المصاحبة هي 120 قرشاً.

ومما تجدر الإشارة إليه أننا قمنا بإيجاد الحل لهذه المشكلة وعلى أساس الاحتياجات الشهرية للصوص الواحد، فإذا أردنا تربية 2000 صوص في شهر معين فهذا يعني أن علينا توفير الغذاء إلى 2000 صوص وذلك يتم من خلال ضرب قيم $س_1$ و $س_2$ في2000. أما الملاحظة الثانية الجديرة بالاهتمام فهي إننا تعاملنا مع قيود ذات علاقة مساوية أو أكبر (≤) ، وهذا يجعل منطقة الحل الممكن تقع إلى يمين الخطوط الممثلة للقيود، وهي القاعدة العامة عند التعامل مع مشاكل تخفيض التكاليف.

خلاصة لطريقة الرسم Summary of the Graphic Solution Method

تتضمن طريقة الرسم وكما لاحظنا من الأمثلة السابقة عدة خطوات يمكن إجمالها بما يأتي:

1- صياغة المشكلة على شكل معادلات ومتباينات رياضية تمثل القيود ودالة الهدف.

2- رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة.

3- رسم الخطوط الممثلة للقيود.

4- تحديد منطقة الحل الممكن، وهذا يعني تحديد المنطقة التي تنسجم مع احتياجات كل القيود.

5- استخدام طريقة الزوايا أو طريقة خطوط الربح أو الكلفة المتكافئة للوصول إلى الحل الأمثل.

3-8-3 حالات ومشاكل خاصة في طريقة الرسم

Special Issues in the Graphical Method of LP

هناك أربع حالات ومشاكل خاصة تظهر عند استخدام طريقة الرسم في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي:

1- تعذر الحل Infeasibility

2- عدم توفر الحدود Unboundness

3- الفائض Redundancy

4- توفر عدة حلول مثالية Alternate Optimal Solutions

1- تعذر الحل Infeasibility

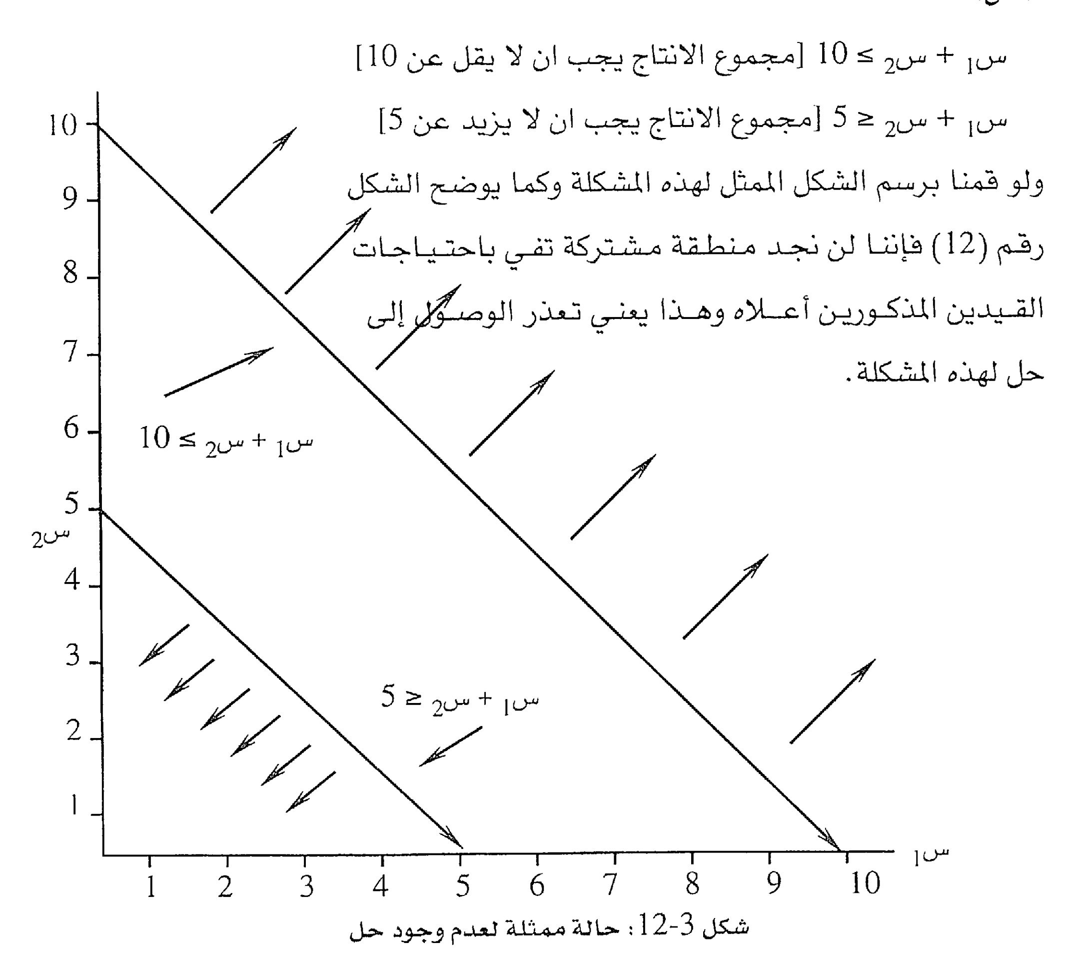
وتعني هذه الحالة عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي باحتياجات كل القيود. ويعني هذا بالنسبة لطريقة الرسم أنه لا يوجد حل ممكن. وتحدث هذه الحالة إذا كانت المشكلة تضم قيوداً متعارضة.

مثال:

$س_1 + س_2 \geq 10$ [مجموع الانتاج يجب ان لا يقل عن 10]

$س_1 + س_2 \leq 5$ [مجموع الانتاج يجب ان لا يزيد عن 5]

ولو قمنا برسم الشكل الممثل لهذه المشكلة وكما يوضح الشكل رقم (12) فإننا لن نجد منطقة مشتركة تفي باحتياجات القيدين المذكورين أعلاه وهذا يعني تعذر الوصول إلى حل لهذه المشكلة.



شكل 3-12: حالة ممثلة لعدم وجود حل

2- عدم توفر الحدود Unboundness

ويعني ذلك عدم وجود حدود على الحل، وهذا يعني أنه يمكن زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة "ومن ثم الربح" دون مخالفة لأي قيد من قيود المشكلة. علماً بأن هذه الحالة هي حالة نظرية وبعيدة عن الواقع، ذلك أننا كأفراد ومؤسسات محددين بالموارد المتاحة لنا في لحظة زمنية معينة، ومع ذلك فإن استعراض هذه الحالة هو متمم لاستعراض الحالات الأخرى التي تصاحب طريقة الرسم في حل مشاكل البرمجة الخطية. وبالنسبة لطريقة الرسم فإن هذا يعني أن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية Open-Ended.

مثال: افرض أن لدينا المشكلة الآتية:

تعظيم ر= 5س$_1$ + 8س$_2$

علما بأن:

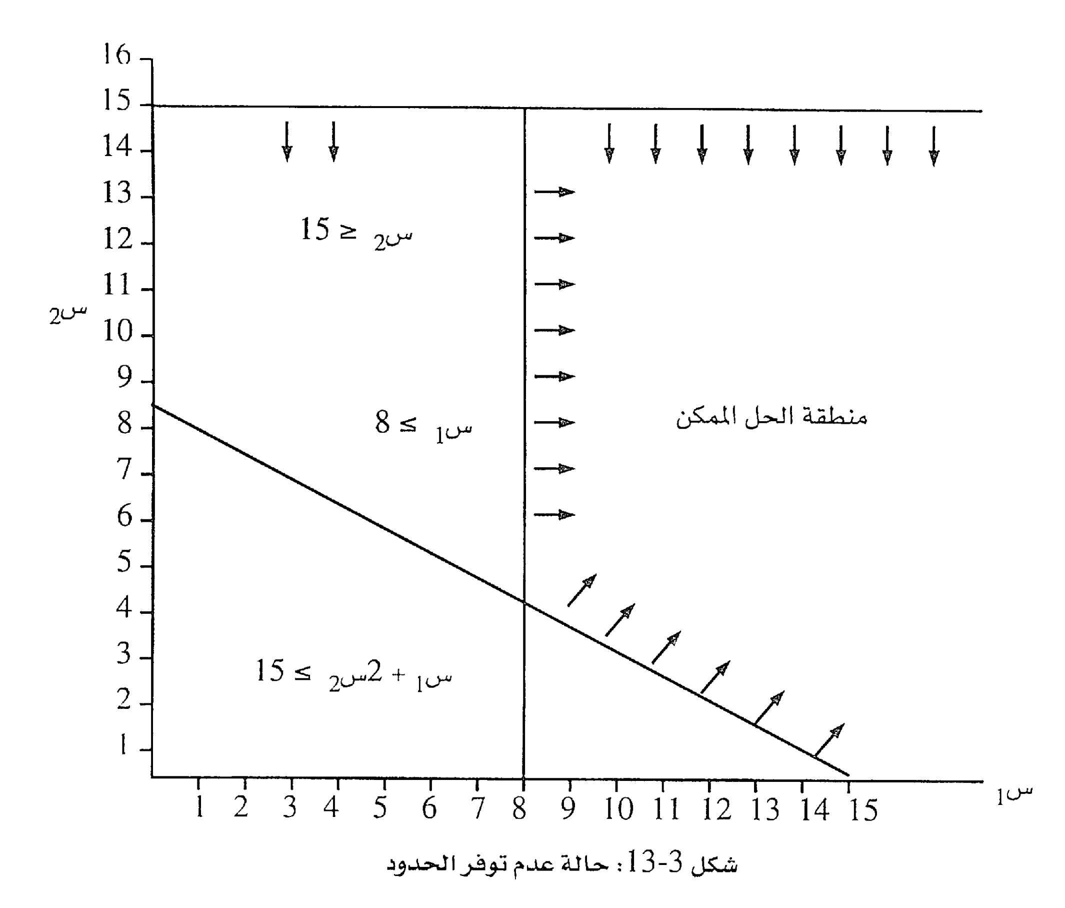
س$_1$ ≤ 8

س$_2$ ≥ 15

س$_1$ + 2س ≤ 15

س$_1$ ، س$_2$ ≥ 0

ولو قمنا برسم الشكل الممثل لهذه المشكلة وكما هو واضح في الشكل رقم (13) فإننا نلاحظ أن منطة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهذا يعني عدم وجود قيود على الحل.



شكل 3-13: حالة عدم توفر الحدود

3- **الفائض** Redundancy

وهي مشكلة شائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة. وتتمثل بوجود قيد فائض. حيث يمثل القيد الفائض ذلك القيد الذي لا يؤثر على منطقة الحل الممكن، وبمعنى آخر هناك قيود أكثر أهمية من غيرها. لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية. وهناك حالة أخرى تظهر عند وجود قيدين متساويين كأن يكون لدينا القيدين الاثنين (6س$_1$ + 2س$_2$ ≥ 60 و12س$_1$ + 4س$_2$ ≥ 120). ولا تشكل هذه الحالة صعوبة أو مشكلة كبيرة في حل مشاكل البرمجة الخطية بواسطة طريقة الرسم، ولكن يجب أن نكون قادرين على تحديد حدوث مثل هذه المعوقات. والمثال الآتي يوضح هذه الحالة.

تعظيم ر = 5س$_1$ + 3س$_2$

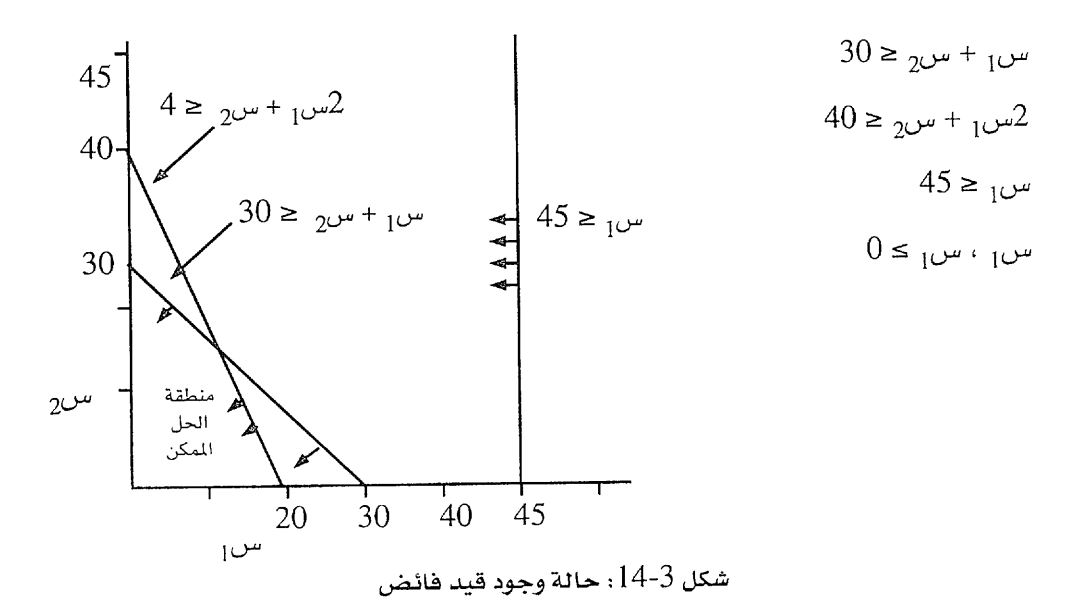
علماً بأن:

س$_1$ + س$_2$ ≤ 30

2س$_1$ + س$_2$ ≤ 40

س$_1$ ≤ 45

س$_1$ ، س$_1$ ≥ 0



شكل 3-14: حالة وجود قيد فائض

يلاحظ من الشكل أعلاه وجود حالة الفائض متمثلة بالقيد س$_1$ ≤ 45، حيث يلاحظ أن هذا القيد لم يؤثر على منطقة الحل الممكن وبالتالي فإن القيدين الأولين قد أبطلا مفعول ذلك القيد، ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً للمشكلة وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

4- توفر عدة حلول مثلى Alternate Optimal Solutions

وتعني هذه الحالة أن مشكلة البرمجة الخطية لها أكثر من حل أمثل. ويمكن التعرف على هذه الحالة عند استخدام طريقة الرسم وعن طريق رسم خطوط الربح أو التكلفة المتكافئة ويكون أحد هذه الخطوط موازياً أو متطابقاً مع أحد قيود المشكلة، أي أن لها نفس الميل.

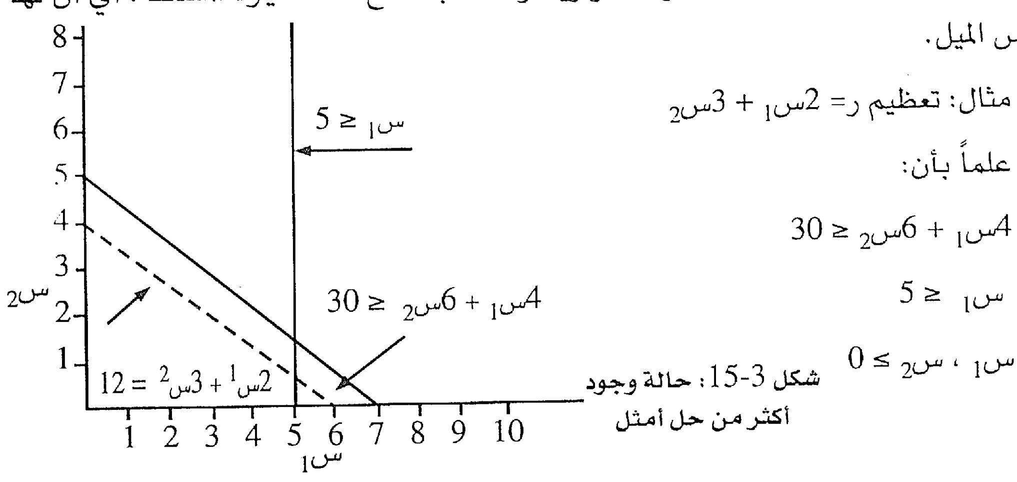
مثال: تعظيم ر= 2س$_1$ + 3س$_2$

علماً بأن:

4س$_1$ + 6س$_2$ ≤ 30

س$_1$ ≤ 5

س$_1$ ، س$_2$ ≥ 0



شكل 3-15: حالة وجود أكثر من حل أمثل

افرض إننا استخدمنا طريقة خطوط الربح المتكافئة للوصول للحل الأمثل، وافرض إننا اخترنا أن يكون الربح 12 ديناراً، فهذا يعني أن:

$$2س_1 + 3س_2 = 12$$

$$س_1 = 0 \text{ ، } س_1 = 4$$

$$س_2 = 0 \text{ ، } س_1 = 6$$

ولو قمنا برسم خط الربح المتكافئ والممثل لربح قدره 12 دينار لوجدناه كما هو موضح في الشكل رقم (15) موازياً للخط الممثل للقيد $4س_1 + 6س_2 \geq 30$، كذلك إذا افترضنا أن الربح يساوي 15 دينار (أي $2س_1 + 3س_2 = 15$) ورسمنا خط الربح المكافئ لهذه المعادلة لوجدناه متطابقاً تماماً مع الخط الممثل للقيد الأول ($4س_1 + 6س_2 \geq 30$) وفي كلتا الحالتين، فإن هذا يعني وجود أكثر من حل أمثل لهذه المشكلة، وأنها كلها تعطي نفس القيمة.

ويمكن كذلك توضيح حالة تعدد الحل الأمثل عن طريق اختبار زوايا منطقة الحل الممكن. فإذا وجدنا أن القيمة المثلى تقع على أكثر من زاوية فهذا يعني أن للمشكلة أكثر من حل أمثل. ولوافترضنا المثال التالي:

عظم ر = $3س_1 + 2س_2$

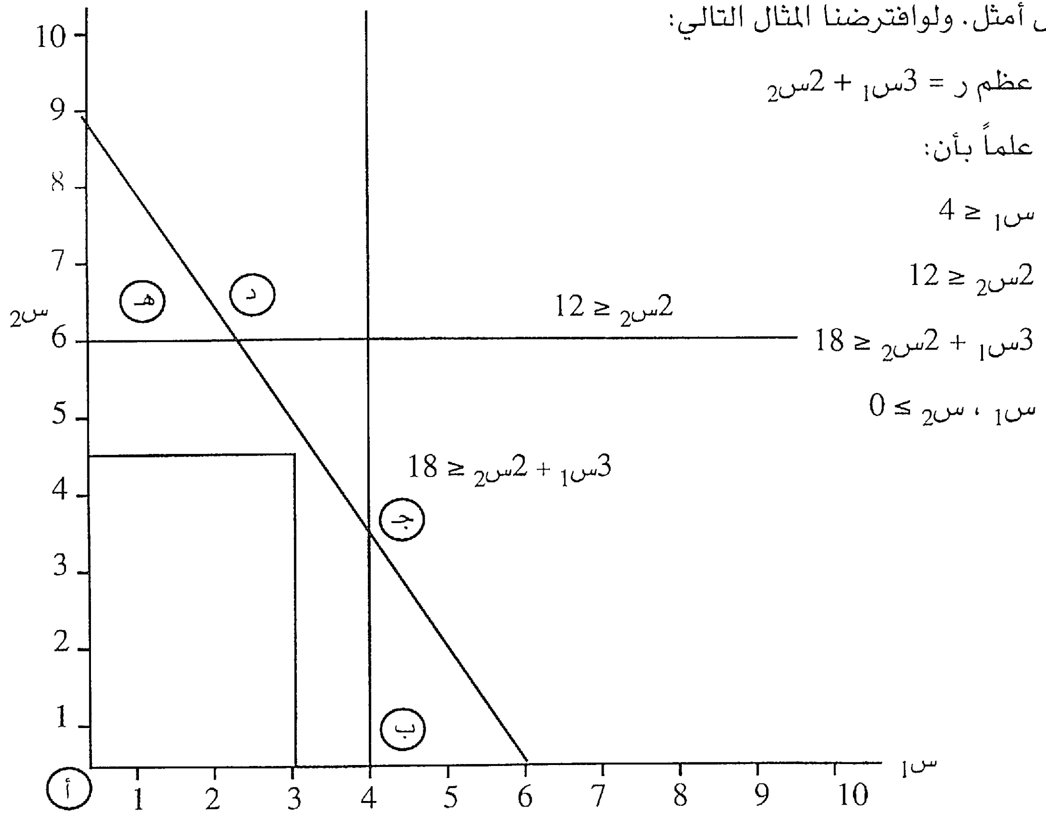
علماً بأن:

$س_1 \geq 4$

$2س_2 \geq 12$

$3س_1 + 2س_2 \geq 18$

$س_1 \text{ ، } س_2 \leq 0$



نلاحظ هنا أن زوايا منطقة الحل الممكن هي النقاط أ، ب، جـ، د، هـ. وفيما يلي توضيح لتقييم الربح عند كل من هذه الزوايا.

معاملات المتغيرات

النقطة	$س_1$	$س_2$	الربح
أ	0	0	0
ب	4	0	12
جـ	4	3	18
د	2	6	18
هـ	0	6	12

نلاحظ هنا أن النقطتين جـ،د يحققان لنا نفس الأرباح. وتوضيحاً لما تم ذكره سابقاً فإن أي نقطة واقعة على الخط الواصل بين هاتين النقطتين سوف تعطينا نفس الأرباح فلو افترضنا مثلاً أن

$س_1 = 3$ ، نجد أن $س_2 = 4.5$

$$3س_1 + 2س_2 = 18$$

$$3(3) + 2س_2 = 18$$

$$2س_2 = 9$$

$$س_2 = \frac{9}{2}$$

$$س_2 = 4.5$$

والربح عند هذه النقطة يساوي

$$3(3) + 4.5(2) = 18$$

تمارين

1- تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من المنتجات (أ، ب). يبلغ ربح الوحدة الواحدة من منتج (أ) 60 ديناراً ومن (ب) 50 ديناراً. وكل وحدة من هذين المنتجين يجب أن تمر بمرحلتي إنتاج. فإذا كانت وحدة المنتج الأول تحتاج إلى 10 دقائق في المرحلة الأولى و8 دقائق في المرحلة الثانية. بينما تحتاج وحدة المنتج الثاني إلى 20 دقيقة في المرحلة الأولى و 5 دقائق في الثانية. فإذا كانت ساعات العمل يومياً في كل من المرحلتين هي 6 ، 3 على التوالي. فما هي الكمية التي يمكن إنتاجها من كل منتج لتحقيق أعلى ربح ممكن مستخدماً الطريقة البيانية.

2- حل باستخدام الرسم البياني

عظم $10س_1 + 15س_2$

علماً بأن:

$2س_1 + 4س_2 \le 60$

$2س_1 + 2س_2 \le 38$

$8س_1 + 6س_2 \le 120$

3- استناداً إلى القيود التالية

$5س_1 + 4س_2 \le 60$

$10س_1 + 10س_2 \le 120$

$س_1 \le 4$

$س_2 \le 10$

$س_2 \le س_1$

أ- أوجد نقطة الحل الممكن بيانياً.

ب- أوجد الربح عند زوايا منطقة الحل الممكن باستخدام دالة الهدف.

$6س_1 + 4س_2$

4- أوجد الحل الأمثل باستخدام الطرية البيانية

عظم 50س$_1$ + 40س$_2$

علماً بأن:

س$_1$ + س$_2$ ≤ 5

س$_1$ − 3س$_2$ ≥ 0

10س$_1$ + 15س$_2$ ≥ 150

20س$_1$ + 10س$_2$ ≥ 160

30س$_1$ + 10س$_2$ ≤ 135

س$_1$ ، س$_2$ ≤ 0

5- أجب عن الأسئلة التالية باستخدام ما يلي:

عظم 30س$_1$ + 10س$_2$

علما بأن:

2س$_1$ + س$_2$ ≥ 4

2س$_1$ + 2س$_2$ ≥ 6

س$_1$ ، س$_2$ ≤ 0

أ- أوجد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

ب- ما تأثير إضافة القيد التالي على نتيجة الحل الأساسي

4س$_1$ + س$_2$ = 4

ج- ما تأثير إضافة القيد التالي على نتيجة الحل الأساسي

3س$_1$ + 3س$_2$ ≥ 15

6- أوجد الحل الأمثل باستخدام الرسم البياني

عظم 5س$_1$ + س$_2$

علما بأن:

3س$_1$ + 4س$_2$ = 24

س$_1$ ≥ 6

س$_1$ + 3س$_2$ ≥ 12

س$_1$ ، س$_2$ ≤ 0

7- حلل ما يلي بيانياً

خفض 10س$_1$ + 20س$_2$

علماً بأن

س$_1$ + س$_2$ ≤ 12

2س$_1$ + 5س$_2$ ≤ 40

س$_2$ ≥ 20

8- حلل ما يلي بيانياً

حفض 8س$_1$ + 2س$_2$

علماً بأن

2س$_1$ − 6س$_2$ ≤ 12

5س$_1$ + 4س$_2$ ≤ 40

س$_1$ − 2س$_2$ ≤ 12

س$_2$ ≥ 6

س$_1$ ، س$_2$ ≤ 0

9- حلل ما يلي بيانياً

خفض 3س$_1$ + 2س$_2$

علماً بأن

س$_1$ ≤ 4

س$_2$ ≤ 6

$س_1 + س_2 \geq 5$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

10- حلل ما يلي بيانيا

عظم $6س_1 + 10س_2$

علماً بأن:

$2س_1 + 4س_2 \leq 40$

$س_1 + س_2 \leq 15$

$س_1 \geq 8$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

11- يمكن لأحدى الشركات الصناعية إنتاج منتجين ونريد استخدام البرمجة الخطية لتحديد فيما إذا كان مناسباً إنتاج المنتجين أم واحداً منهما وكم تنتج وذلك لتعظيم أرباحاً. وقد علمت بأن الوحدة الواحدة من هذين المنتجين تمر بمرحلتين إنتاجيتين حيث تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول إلى أربعة وحدات من المرحلة الأولى وستة وحدات من المرحلة الثانية في حين تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني إلى ثمانية وحدات من المرحلة الأولى ووحدتين من المرحلة الثانية، علماً بأن الكميات المتاحة في المرحلتين هي 160 وحدة و 120 وحدة وعلى التوالي أما ربحية الوحدة الواحدة فقد قدرت ب 100 دينار للمنتج الأول و240 دينار للمنتج الثاني.

المطلوب صياغة هذه المشكلة على اساس أنها مشكلة برمجية خطية وحلها بواسطة طريقة الرسم.

12- تريدإحدى الشركات استخدام البرمجة الخطية لتحديد مزيجها الإنتاجي وقد علمت بأن هذه الشركة تستطيع إنتاج منتجين، وتريد إذن تحديد ماذا تنتج وكم تنتج وبذلك الشكل الذي يؤدي إلى أفضل النتائج. وقد علمت بأن هذين المنتجين يمران بأربعة مراحل إنتاجية حيث تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول إلى 10/7 وحدة، 2/1 وحدة ووحدة واحدة و10/1 وحدة من المراحل الأربعة وعلى التوالي، فيما تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني إلى وحدة واحدة و6/5 وحدة و3/2 وحدة و4/1 وحدة من

المراحل الأربعة وعلى التوالي، كما علمت بأن الكميات المتاحة في المراحل الأربعة هي 630، 600، 708، 135 وحدة وعلى التوالي، وأخيراً فقد علمت بأن ربحية الوحدة الواحدة من النوع الأول عشرة دنانير ومن النوع الثاني تسعة دنانير.

المطلوب صياغة هذه المشكلة على اساس أنها مشكلة برمجية خطية وحلها بواسطة طريقة الرسم.

13- تستطيع إحدى الشركات إنتاج منتجين وتريد أن تحدد ماذا تنتج وكم تنتج لتعظيم أدائها، وقد علمت أن هذين المنتجين يحتاجان إلى مصدر واحد وان احتياج الوحدة الواحدة من النوع الأول من هذا المصدر يساوي احتياج الوحدة الواحدة من النوع الثاني من نفس المصدر ويساوي وحدتان وان الكمية المتاحة من هذا المصدر والواجب استخدامها بالكامل هي 2000 وحدة، كذلك فقد قامت الإدارة بوشع تحديدات على الإنتاج حيث قررت أن لا يزيد حجم الإنتاج من النوع الأول عن 600 وحدة وأن لا يقل حجم الإنتاج من النوع الثاني عن 300 وحدة، وان كلفة إنتاج الوحدة من النوع الأول تساوي عشرة دنانير ومن النوع الثاني تساوي "16" ستة عشر دينارا.

المطلوب: صياغة هذه المشكلة على اساس أنها مشكلة برمجية خطية وحلها بواسطة طريقة الرسم.

14- بين الحالة الخاصة التي تصاحب كل من المشاكل الآتية:

أ) $س_1 + 2س_2 \geq 6$

$2س_1 + س_2 \geq 8$

$س_1 \leq 7$

$س_1 ، س_2 \leq 0$

ب) تعظيم ر = $س_1 + 2س_2$

القيود:

$س_1 + س_2 \geq 20$

$2س_1 + س_2 \geq 30$

$س_1 \leq 25$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

ج) تعظيم ر = $3س_1 + 5س_2$

القيود:

$س_1 \geq 5$

$س_2 \leq 10$

$س_1 + 2س_2 \geq 10$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

د) تعظيم ر = $3س_1 + 2س_2$

القيود:

$6س_1 + 4س_2 \leq 24$

$س_1 \leq 3$

$س_1 - س_2 \geq 5$

الفصل الرابع

البرمجة الخطية - الطريقة المبسطة L P: The Simplex Method

1-4 مقدمة

عرفنا في الفصل السابق كيفية الوصول للحل الأمثل لمشكلة برمجة خطية بسيطة (ذات مجهولين) وذلك باستخدام طريقة الرسم. إلا أن المشاكل التي تواجهها المؤسسات في الحياة العملية كبيرة ومعقدة، بمعنى أنها تحتوي على أعداد كثيرة من المتغيرات والقيود، والتي يجب أخذها بعين الاعتبار عند عملية اتخاذ القرار، وهذا يجعل إمكانية استخدام طريقة الرسم لحل مثل هذه المشاكل أمراً متعذراً. ولذا لا بد من استخدام طريقة أخرى أشمل وأسهل ألا وهي الطريقة المبسطة.

كيف تعمل الطريقة المبسطة

تعمل الطريقة المبسطة بطريقة مشابهة لطريقة الرسم في أحد المجالات العامة. ذلك أن الوصول للحل الأمثل وحسب طريقة الرسم يمكن الوصول إليه من خلال اختبار القيمة المصاحبة لكل زاوية من زوايا الحل الممكن وكما لاحظنا في الفصل السابق. كذلك عرفنا بأن نظرية البرمجة الخطية أعلمتنا بأن الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية يقع على أحد زوايا الحل الممكن.

وفي مشكلة البرمجة الخطية التي تضم متغيرات كثيرة، فإنه من الممكن أن لا نستطيع إيجاد أو رسم منطقة الحل الممكن، ولكن هذا لا يمنع حقيقة أن الحل الأمثل ما زال يقع على أحد زوايا منطقة الحل الممكن الممثل بشكل ذي جوانب وأبعاد متعددة.

وتقوم الطريقة المبسطة بفحص هذه النقاط بشكل متسلسل وباستخدام المفاهيم الأخرى ولحين الوصول إلى الحل الأمثل. وفي كل مرة نصل إلى نتيجة أفضل للدالة الهدفية بحيث نقترب إلى الحل الأمثل على مراحل.

إن دراسة وفهم الطريقة المبسطة مهم وذلك لفهم الأفكار المستخدمة لأيجاد الحل. إن أهمية الطريقة المبسطة لا تنبع من كونها تساعدنا في الوصول للحل الأمثل للمتغيرات

المختلفة للمشكلة موضوع البحث، وبالتالي الوصول إلى أعلى الأرباح أو أقل التكاليف، ولكن أهميتها تتأتى أيضاً من كونها تزودنا بمعلومات اقتصادية مهمة، وكذلك فإنه ولإمكانية استخدام الحاسوب وتفسير النتائج المستحصلة لا بد من التعرف على كيفية عمل الطريقة المبسطة وتفسير جوانبها المختلفة.

2-4 كيفية ترتيب مصفوفة الحل الأولي How to set up the simplex solution

مرة أخرى دعنا نعود لمثالنا المتعلق بالشركة الوطنية لصناعة الأثاث. كنا قد وضعنا التعاريف الآتية:

س1 = عدد المكاتب المنتجة.

س2 = عدد الكراسي المنتجة.

وكذلك صيغة المشكلة كما يأتي:

تعظيم ر=5س1+3س2 (دالة الهدف)

علما بأن

3س1+5س2≤15 (القيد المتعلق بساعات شعبة النجارة)

5س1+2س2≤10 (القيد المتعلق بساعات شعبة الإكمال أو التجميع)

س1 س2 ≥0 (قيد اللاسلبية)

أ- تحويل القيود أو المتباينات إلى معادلات.

لاستخدام الطريقة المبسطة لا بد من تحويل المتباينات إلى معادلات. ذلك أن هذه الطريقة ما هي إلا عبارة عن طريقة مصفوفة جبرية يتوجب أن تكون كل العلاقات الرياضية مرتبة بشكل معادلات تحتوي على كل المتغيرات.

ولتحويل القيود المشتملة على إشارة أصغر من أو يساوي (≤) كما في مثالنا إلى معادلات، نقوم بإضافة ما يسمى بالمتغيرات الحرة Slack Variables لهذه القيود، حيث يمثل المتغير الحر المصادر غير المستخدمة.

افرض أن ح1= المتغير الحر الذي يمثل عدد الساعات غير المستخدمة في شعبة النجارة.

افرض أن ح2= المتغير الحر الذي يمثل عدد الساعات غير المستخدمة في شعبة الإكمال.

وبإضافة هذين المتغيرين للقيود يمكن كتابتها بشكل معادلات وعلى النحو الآتي:

3س1 + 5س2 + ح1 = 15

5س1 + 2س2 + ح2 = 10

س1 ، س2 ، ح1 ، ح2 ≥ 0

أما فيما يتعلق بدالة الهدف فإنها تصبح على الشكل الآتي:

ر = 5س1 + 3س2 + 0 (ح1) + 0 (ح2)

ذلك أن ربحية العامل الحر تساوي صفرا.

وبناء على ما تقدم وإذا افترضنا حالة اللاإنتاج (أي إننا قررنا عدم إنتاج أي مكتب أو كرسي) فهذا يعني إننا لم نستخدم مواردنا المتاحة وأ، س1= س2=صفر، وأن الوقت غير المستخدم في الشعبة الثانية (ح2) = 10 ساعات.

أما إذا افترضنا إننا قررنا إنتاج مكتبين وعدم إنتاج كرسي فيترتب على هذا القرار ما يأتي:

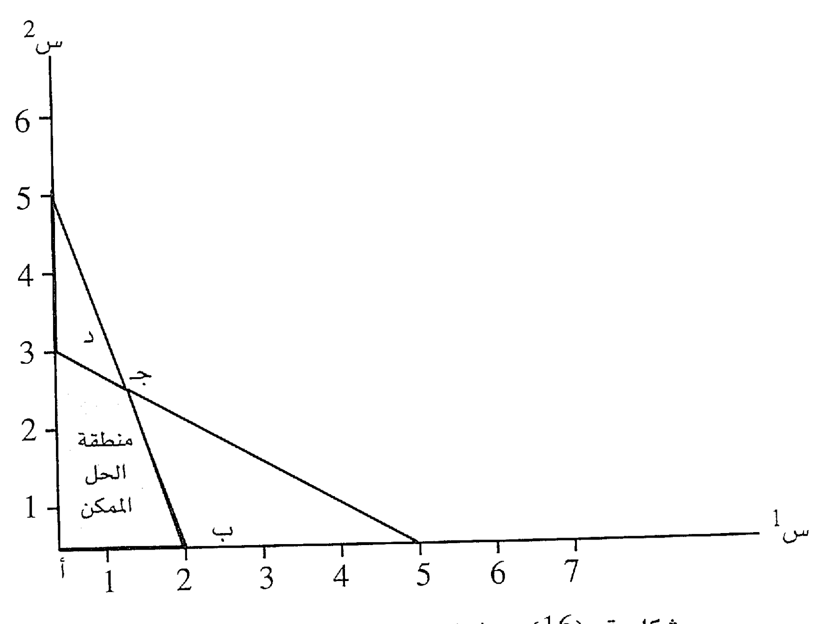
س1 = 2 ، س2 = 0 ، ح1 = 9 ، ح2 = 0

أي أن هناك 9 ساعات غير مستخدمة في الشعبة الأولى في حين استخدمنا كل الساعات المتاحة لنا في الشعبة الثانية.

إيجاد الحل الأولي جبريا Finding an Initial Solution Algebraically

إذا نظرنا إلى القيود بعد تحويلها من متباينات إلى معادلات وذلك بإضافة العوامل الحرة، نلاحظ أن لدينا معادلتين بأربعة مجاهيل (س1، س2، ح١، ح2) ويمكن حل هذه المشكلة من خلال إعطاء أثنين من المتغيرات قيمة صفرية وبالذات س1 وس2، ومن ثم حل المعادلتين لإيجاد قيمة المتغيرين الآخرين حي ستكون قيمة ح1=15 وقيمة ح2=10 وكما بينا في الجزء السابق.

تبدأ الطريقة المبسطة بحل أولي ممكن والذي تكون فيه كل المتغيرات الحقيقية (س1 وس2) مساوية للصفر، وشيء بديهي أن يعطي هذا الحل ربحا قدره صفرا، وهذا الحل ليس حلا اقتصاديا ولكنه يمثل نقطة من نقاط الزوايا لمنطقة الحل الممكن، وهذه النقطة هي نقطة (أ) في الشكل رقم (16).



شكل رقم (16) منطقة الحل الممكن وزوايا هذه المنطقة

ولما كانت الطريقة المبسطة تأخذ بنظر الاعتبار الحل الممكن فقط، فإنها تأخذ نقاط الزوايا بعين الاعتبار وتبدأ بالنقطة الأولى (صفر، صفر) وتتحرك للنقاط الأخرى حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

جدول المصفوفة الأولى The First Simplex Tableau

لتسهيل التعامل مع المعادلات ودالة الهدف قد قمنا بتفريغها في الجدول رقم (4-1).

مزيج الحل	العوامل				الكمية
	س1	س2	س3	س4	
ح1	3	5	1	0	15
ح2	5	2	0	1	10

الأرقام الموجود في الصف الأول في الجدول (أمام ح1) هي عبارة عن معاملات العوامل في معادلة قيد شعة النجارة (3س1+5س2+ح1=15)، وكذلك فإن الأرقام الموجودة في الصف الثاني من الجدول (أمام ح2) هي عبارة عن معاملات العوامل في معادلة قيد شعبة الإكمال (5س1+2س2+ح2-10).

لقد ذكرنا سابقا بأن الطريقة المبسطة تبدأ من نقطة الأصل حيث تكون العوامل الحقيقية تساوي صفرا (س1=س2= صفر) وبالتالي عدم وجودها في عمود مزيج الحل وأن العوامل غير الحقيقية هي الموجودة في عمود مزيج الحل، حيث ح2=15 وح2=10 ، وهذاالحل يدعى بالحل الأساسي الممكن Basic Feasible Solution ويمكن تمثيل هذا الحل بشكل متجه Vector أو عمود .Column

[س1]   [0]

[س2]   [0]

[ح1]   =   [15]

[ح1]   [10]

وفيما يلي جدول المصفوفة الأساسي للشركة الوطنية لصناعة الأثاث والذي يعطينا الحل الأولي الممكن.

جدول رقم (4-2)

عمود الإنتاج	عمود الربحية	العوامل الحقيقية		العوامل الحرة		عمود الكمية	
مزيج الحل	ر.ح	س1	س2	ح1	ح2	الكمية	
		5	3	0	0		صف ربحية الوحدة الواحدة
ح 1	0	3	5	1	0	15	صفوف معادلات القيود
ح 2	0	5	2	0	1	10	صفوف معادلات القيود
ز . ح		0	0	0	0	0	صف الربح الإجمالي
ر.ح – ز.ح		5	3	0	0		صف الربح الصافي

ملاحظات على الحل:

يمكن تثبيت الملاحظات الآتية على الحل السابق:

1- تسمى المتغيرات المكونة لمزيج الحل بالمتغيرات الساسية (Basic Variables ح1 وح2) وتسمى المتغيرات غير الداخلة في الحل بالمتغيرات غير الأساسية .Non Basic Variables

2- الأرقام الموجودة في داخل الجدول وتحت المتغيرات في الأعمدة يمكن تفسيرها أو اعتبارها معدّلات تعويض Substitution Rates فمثلا إذا أردنا إنتاج وحدة واحدة من المكاتب فإن هذا يعني إزالة (استخدام) 3 ساعات من ح1 و 5 ساعات من ح2، ويعني ذلك أن إنتاج مكتب واحد يستدعي تشغيل شعبة النجارة 3 ساعات وتشغيل شعبة الإكمال لمدة 5 ساعات، وهكذا، إذا أردنا إنتاج كرسي واحد فهذا يستدعي تشغيل شعبة النجارة لمدة 5 ساعات وتشغيل شعبة الإكمال لمدة ساعتين أي تخفيض ح1 بمقدار 5 وح2 بمقدار 2 ساعة، وهكذا بالنسبة لبقية الأرقام.

3- إن كل متغير يظهر في مزيج الحل يجب أن يكون في عموده الرقم واحد، وتظهر هذه القيمة عند نقطة التقاطع بين عمود وصف المتغيرات المذكورة، وقيما صفرية في الأماكن الأخرى في العمود، فعلى سبيل المثال وبالرجوع إلى الجدول رقم (4-2) نلاحظ أن العمود تحت ح1 يحتوي على 1 ثم صفر (!) والعمود الذي تحت ح2 يحتوي على صفر ثم 1. [0]
[1]

4- فيما يتعلق بالقيم الموجودة في الصف زج فقد حصلنا على هذه القيم من خلال ضرب الأرقام (صفر) وهي القيم الموجودة تحت العمود رج، بكل رقم في ذلك الصف وذلك العمود ثم جمع النتائج وكما يأتي:

صفر (3) + صفر (5) = صفر → عمود س1

صفر (5) + صفر (2) = صفر → عمود س2

صفر (1) + صفر (0) = صفر → عمود ح1

صفر (0) + صفر (1) = صفر → عمود ح2

صفر (15) + صفر (10) = صفر → عمود س1

5- الأرقام الموجودة في الصف رج-زج تمثل الصافي، أي الربح المراد تحقيقه في دالة الهدف والربح المتحق من الحل الحالي، وهذا يمثل فرصة ضائعة إذا لم نتمكن من تحقيقه. وللحصول على الأرقام نقوم بطرح ز ج ولكل عمود من قيمة ر ج الموجودة تحت المتغيرات في أعلى الجدول وكما يأتي:

ز ج - ر ج

5 - 0 = 5 → عمود س1

3 - 0 = 3 → عمود س2

0 - 0 = 0 → عمود ح1

0 - 0 = 0 → عمود ح2

6- من الواضح أن الربح الناجم عن هذا الحل هو صفر، وهو حل غير مثالي، ومن الواضح أيضا أننا نستطيع زيادة أرباح الشركة بمقدار 5 دنانير إذا أنتجنا وبعنا وحدة واحدة من المكاتب، و3 دنانير إذا أنتجنا وبعنا كرسيا واحدا.

7- إن وجود رقم سالب في الصف (ر ج-ز ج) ينبؤنا بأن الربح سوف يتناقص إذا أضفنا المتغير المرتبط به إلى مزيج الحل.

8- أخيرا نصل إلى الحل الأمثل بالطريقة المبسطة عندما تكون الأرقام في الصف الأخير (صف رج -زج) كلها أرقاما سالبة أو أصفارا.

3-4 إجراءات أو خطوات الطريقة المبسطة: Simplex Solutions Procedures

بعد إكمال جدول الحل الأول نقوم باتباع مجموعة من الخطوات وذلك بهدف إيجاد القيم المطلوبة للجدول الجديد، وبالرغم من أن احتساب هذه القيم ليس صعبا بحد ذاته، ولكن حدوث أي خطأ فيه يؤدي إلى الوصول إلى نتائج خاطئة.

1- تحديد المتغير الداخل:

ويتم هذا من خلال اختيار المتغير غير الأساسي أي المتغير غير الداخل في الحل الحالي والذي يمكن بواسطته تحسين الحل الموجود بأكبر درجة ممكنة.

وهذا يعني تحديد العمود وكذلك المتغير الذي يحوي أكبر رقم موجب في الصف الأخير (رج-زج). وتسمى هذا العمود بعمود الارتكاز أوالعمود المحوري .Pivot Column

2- تحديد المتغير الأساسي الخارج:

ويتم ذلك من خلال اختيار العامل الأساسي الذي يصل إلى الصفر أولا أي (الذي تصاحبه أقل كمية موجبة)، وهذه الكمية هي ناتج قسمة الأرقام في عمود الكمية على

الأرقام في عمود الارتكاز، أما فيما يتعلق بالرقم الأصغر والمصاحب للمتغير الذي سيترك الحل فإنه يشير إلى الحد الأعلى الذي يمكن أن ياخذه المتغير الجديد والذي سيدخل الحل ودون مخالفة للقيود الموجودة على المشكلة.

ويسمى صف المتغير الذي سيخرج من الحل بصف الارتكاز أو الصف المحوري Pivot Row.

3- احتساب القيم الجديدة في الصف المحوري الجديد:

ويتم ذلك من خلال قسمة كل رقم في الصف المحوري القديم على الرقم المحوري Pivot Number وهي نقطة تقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري، وهذه الخطوة تساعدنا على إيجاد الرقم (1) في عمود المتغيرات الذي دخل الحل.

4- تحديد الحل الممكن الجديد:

وذلك باحتساب القيم الجديدة للصفوف الأخرى، ويتم ذلك وفقا للمعادلة الآتية:

القيم في الصف الجديد= (القيم في الصف القديم)-(الرقم المقابل للرقم المحوري × الرقم ذو العلاقة بالصف المحوري الجديد).

وستساعدنا هذه الخطوة على إيجاد القيم الصفرية في عمود المتغير الذي دخل الحل.

بعد أن نحتسب القيم الجديدة للصفوف في داخل الجدول، نقوم باحتساب القيم فى الصف رج وكذلك في الصف ر ج - ز ج وكما أوضحنا سابقا.

5- إذا كانت الأرقام في الصف الأخير (رج-زج):

كلها مساوية أو أقل من صفر (≥ 0)، فهذا يعني أننا وصلنا إلى الحل الأمثل، أما إذا لم يكن الحل كذلك فنعود للخطوة الأولى، وهكذا إلى أن نصل إلى الحل الأمثل.

إيجاد الجدول الثاني للطريقة المبسطة.

بعد أن تعرفنا على خطوات الطريقة المبسطة نستطيع الآن تطبيقها على مثالنا، إن هدفنا هنا هو إدخال متغير جديد للحل وذلك لزيادة أرباح الشركة.

1- تحديد المتغير الذي سيدخل الحل:

إن المتغير الذي سيدخل الحل هو س1 أو س2 ذلك أنهما يمثلان العوامل غير الأساسية، وسنختار المتغير الذي سيؤدي إلى زيادة الأرباح بمعدل أعلى وهذا يعني اختيار المتغير الذي تكون القيمة في عموده وفي الصف الأخير أكبر قيمة موجبة وهذا المتغير هو س1

ذلك أنه يؤدي إلى زيادة الأرباح بمعدل 5 دنانير للوحدة الواحدة، وهذا أعلى من ربحية الوحدة الواحدة من س2 والبالغة 3 دنانير. ويسمى عمود س1 بعمود الارتكاز أو العمود المحوري وكما يوضح الجدول رقم (4-3).

جدول رقم (4-3)

مزيج الحل	رج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية	النسبة
الحل		5	3	0	0		
ح1	0	3	5	1	0	15	$\frac{15}{3}=5$
ح2 (صف الارتكاز)	0	(5) الرقم المحوري	2	0	1	10	$\frac{10}{5}=2$
زج		0	0	0	0		
رج - زج		5 (عمود الارتكاز)	3	0	0		

2- **تحديد المتغيرات الذي سيخرج من الحل:**

ويتم ذلك من خلال اختيار العامل الذي تصاحبه أقل كمية موجبة،والتي هي ناتج قسمة الأرقام عمود الكمية على الأرقام في عمود الارتكاز، وكما يبين الجدول رقم (4-3) وتحت عمود النسبة، بناءً على النتائج المبينة في العمود الأخير من الجدول فإن أصغر رقم مصاحب إلى ح2 وهذا يعني أن ح2 سيخرج من الحل وسيدخل بدلا منه س1، وبناء على هذه الخطوة فإن صف ح2 هو الصف المحوري أو صف الاتكاز كما هو موضح في الجدول كما نلاحظ في عمود النسبة بأن الرقم المقابل إلى ح2 يساوي 2، وهذا الرقم يشير إلى أعلى قيمة يمكن أن يأخذها س1 في الحل القادم.

3- **إيجاد القيم الجديدة للصف المحوري الجديد:**

ويتم ذلك من خلال تقسيم القيم الموجودة في الصف المحوري القديم على معامله في العمود المحوري وهو الرقم (5).

$$\frac{5}{5}=1 \ ، \ \frac{2}{5} \ ، \ 0 \ ، \ \frac{1}{5} \ ، \ \frac{10}{5}=2$$

وتثبت القيم الجديدة في الجدول الجديد كما يوضح الجدول (4-4).

4- إيجاد القيم الجديدة للصفوف الأخرى:

أ- احتساب القيم الجديدة للصف ح1.

ويتم ذلك من خلال استخدام المعادلة التي تمت الإشارة إليها سابقا.

$0 = (1 \times 3) - 3$

$\frac{19}{5} = (5 / 2 \times 3) - 5$

$1 = (0 \times 3) - 1$

$\frac{3-}{5} = (5 / 1 \times 3) - 1$

$9 = (2 \times 3) - 15$

ب- احتساب القيم في الصف ز ج:

$5 = (0)\ 0 + 1 \times 5$	عمود س1
$2 = (5/19)\ 0 + 5/2 \times 5$	عمود س2
$0 = (0)\ 0 + 0 \times 5$	عمود ح1
$1 = (5/13-)\ 0 + 5/1 \times 5$	عمود ح2
$10 = (9)\ 0 + 2 \times 5$	عمود الكمية

ج- احتساب القيم في الصف ر ج - ز ج

$0 = 5 - 5$	عمود س1
$1 = 2 - 3$	عمود س2
$0 = 0 - 0$	عمود ح1
$1- = 1 - 0$	عمود ح2

والجدول رقم (4-4) يبين هذه القيم

مزيج الحل	ر ج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية	النسبة
		5	3	0	0		
س1	5	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	2	
ح1	0	0	$\frac{19}{5}$	1	$\frac{-3}{5}$	9	
ز ج		5	2	0	1	10	
ر ج - ز ج		0	1	0	-1		

5- **اختبار الحل:**

إذا نظرنا إلى الصف الأخير (ر ج - ز ج) نلاحظ أن القيم ليس كلها () ذلك أن هناك بعض الأرقام الموجبة (الرقم 1 تحت المتغير س2)، وهذا يعني أنه بالإمكان تحسين الحل وزيادة الأرباح ولكن قبل تحديد المتغير الذي سيدخل الحل والمتغير الذي سيخرج من الحل دعنا نثبت بعض الملاحظات على هذا الحل:

1- إن مزيج الحل الآن أصبح يتكون من أحد المتغيرات الحقيقية (س1) وأحد المتغيرات غير الحقيقية (ح1).

2- إن س1 =2، وأن ح1=9، وهذا يعني أننا استخدمنا كامل الساعات المتاحة في شعبة الإكمال بينما استخدمنا فقط 6 ساعات من شعبة النجارة وبقي لدينا 9 ساعات غير مستغلة.

3- إن الربح المتحقق نتيجة هذا الحل = 10 وهو أفضل بكثير من الربح المتحقق من الحل الأول والبالغ صفرا.

4- إن معدلات التعويض كما بينا سابقا هي عبارة عن المعاملات الموجودة في الجدول، إن نظرة إلى عمود س2 في الجدول (4-4) تدلنا على أنه إذا أردنا كرسي واحد فإنه يستدعي الاستغناء عن 5/2 مكتب وكذلك 5/19 من وقت شعبة النجارة، ولكن ماذا تعني الأرقام 5/2 و5/19 لا سيما وأننا نعلم أن إنتاج كرسي واحد يحتاج إلى خمس ساعات من وقت شعبة النجارة.

إن الأرقام السابقة (5/2 و5/19) تعني ما يأتي:

إن الوحدة الواحدة من المنتج الأول يحتاج إلى 3 ساعات من وقت شعبة النجارة وعليه فإذا استغنينا عن 5/2مكتب فإن هذا يعني توفير 5/2×3= 5/6 ساعة.

5/6 + 5/19 = 5/25 = 5 ساعات وهو العدد المطلوب من شعبة النجارة لصنع كرسي واحد،وهكذا يمكن تفسير الأرقام الموجود في قلب الجدول.

لقد توصلنا إلى حل مبين في الجدول رقم (4-4) ولقد استنتجنا وكما أشرنا سابقا إلى أن هذا الحل ليس هو الحل الأمثل وبالتالي فإنه بالإمكان تحسين الحل الحالي وهذا يعني إعادة الخطوات من 1إلى 5 ولحين الوصول إلى الحل الأمثل.

تطوير الجدول الجديد

يمكن تطوير الجدول والذي يبين الحل الجديد وذلك من خلال تطبيق الخطوات الخمسة المشار إليها سابقا.

1- بالرجوع إلى الجدول رقم (4-4) نلاحظ بأن المتغير الوحيد الذي يمكن إدخاله للحل في المرة القادمة هو س2 . ذلك أن هذا المتغير هو المتغير الوحيد الذي يصاحبه رقم موجب في الصف الأخير، الرقم (1)، وهذا يعني أن كل كرسي نبدأ بإنتاجه وبيعه سوف يؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار دينار واحد، وبذلك يكون عمود س2 هو عمود الارتكاز.

2- الخطوة الثانية تتعلق بتحديد المتغير الذي سيخرج من الحل هل هو س1 او ح1، ويتم تحديد المتغير الذي سيخرج من الحل من خلال النظر إلى عمود النسبة في الجدول رقم (4-5) واختيار المتغير الذي يصاحبه أصغر قيمة موجبة، حيث يلاحظ أن صف ح1، يصاحبه أصغر قيمة موجبة، إذا ح1 سيخرج من الحل ليدخل س2 بدلا منه.

جدول رقم (4-5)

مزيج الحل	ر ج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية	النسبة
		5	3	0	0		
س1	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	2	$5 = \frac{2}{\frac{2}{5}}$
ح1	0	0	$\frac{19}{5}$ (الرقم المحوري)	1	$\frac{3-}{5}$	9	$\frac{45}{19} = \frac{9}{\frac{19}{5}}$
ز ج	الرقم المحوري	5	2	0	1	10	
ر ج - ز ج		0	1	0	1-		

صف الارتكاز او الصف المحوري

عمود الارتكاز أو العمود المحوري

3- إيجاد القيم في الصف المحوري الجديد:

ويتم ذلك من خلال قسمة الأرقام الموجودة في الصف المحوري القديم صفحة 1 على الرقم المحوري 5/19، وكما يأتي:

0 = 5/19 ÷ 0 ، 1 = 5/19 ÷ 5/19 ، 19/5=5/19÷1 ، 19/3-=5/19÷5/3- ،

19/45=5/19÷19

4- إيجاد القيم الجديدة للصفوف الأخرى وذلك باستخدام نفس المعادلة المشار إليها سابقا.

أ- للصف س1.

1 = (0 x 5/2) -1

0 = (1 x 5/2) - 5/2

19/2- = (19/5 x 5/2) - 0

19/5 = (19/3- x 5/2) -5/1

19/20 = (19/45 x 5/2) -2

ب- للصف ز ج

5 = 0 x 1 x 5

3 = 1 x 3 x 5

19/5 = 19/5 x 19/2 - x 5

19/16 = 19/3- x 19/5 x 5

19/235 = 19/45 x 19/20 x 5

ج- للصف رج-زج

0 = 5 - 5 عمود س1

0 = 3 - 3 عمود س2

19/5- = 19/5-0 عمود ح1

19/16- = 19/16 - 0 عمود ح2

الجدول رقم (4-6) يبين ذلك.

جدول رقم (4-6)

مزيج الحل	ر ج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية
		5	3	0	0	
س1	5	1	0	$\frac{2-}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
س2	2	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{3-}{19}$	$\frac{45}{19}$
ز ج		5	3	$\frac{5}{19}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{235}{19}$
ر ج - ز ج		0	0	$\frac{5-}{19}$	$\frac{16-}{19}$	

5- إذا نظرنا للجدول رقم (4-6) نلاحظ أن كل القيم في الصف (رج - زج) (≤0) وهذا يعني أننا وصلنا للحل الأمثل والذي يتضمن ما يأتي:

س1 = $\frac{20}{19}$

س2 = $\frac{45}{19}$

وأن قيمة الحل الأمثل هي: $\frac{235}{19}$

وهذا هو نفس الحل الذي توصلنا له بواسطة طريقة الرسم، حيث يلاحظ أننا استخدمنا كل الوقت المتاح لدى كل من شعبة النجارة وشعبة الإكمال، وذلك حسب هذا الحل فإ، ح1 = ح2 = 0

وللتأكد من أن هذا الحل يفي باحتياجات القيود نعوض قيم س1، س2 في معادلات القيود.

أ. القيد الأول

3س1 + 5س2 ≤ 15

$3\,(\frac{20}{19}) + 5\,(\frac{45}{19}) \le 15$

وهذا يعني أنه لا يوجد تعارض مع القيد الأول

ب: القيد الأول

5س1 + 2س2 ≤ 10

$5\,(\frac{20}{19}) + 2\,(\frac{45}{19}) \le 10$

مرة أخرى لا يوجد تعارض مع القيد الثاني.

وجود قيم سالبة على الجانب الأيسر للقيود Negative Left Hand Sides

ماذا لو كانت قيمة أو أكثر من القيم الموجودة على الجانب الأيسر للقيود سالبة؟

لتوضيح كيفية معالجة مثل هذه الحالة دعنا نتابع المثال الآتي:

افرض أن إحدى الشركات تنتج نوعين من المنتجات (النوع المحسن والنوع العادي)، وافرض أن الشركة قررت أن يكون إنتاج النوع العادي مساويا أو أقل مقدارا من عدد

الوحدات المنتجة من النوع المحسن، ولكن بعد توفير 30 وحدة من النوع المحسن وذلك لإغراض العرض وفقا لذلك وعلى افتراض أن:

س1 = عدد الوحدات المنتجة من النوع العادي.

س2 = عدد الوحدات المنتجة من النوع المحسن.

نستطيع صياغة هذا القيد كما يأتي:

س1 ≥ س2 - 30

بطرح س2 من الطرفين، نستطيع وضع المتغيرات في الجانب الأيمن والكمية الثابتة في الجانب الأيسر، وكما يأتي:

س1 – س2 ≥ ±30

ولكن القيد بهذه الصورة يخالف أحد افتراضات البرمجة الخطية، (افتراض اللاسلبية) أي أن قيم المتغيرات يجب أن تكون موجبة وبناء على ذلك لا بد من إيجاد طريقة للتخلص من الرقم السالب وقبل أن نضعه في المصفوفة تمهيدا لحل المشكلة، هناك في الحقيقة ثلاث حالات (أشكال القيود) لا بد من مراعاتها، وهذا يعني أنه لا بد من تحديد فيما إذا كانت العلاقة بين طرفي القيد علاقة تساوي (=) وعلاقة أصغر من أو يساوي (≥) أو علاقة أكبر من أو يساوي (≤).

فيما يأتي معالجة سريعة لكل حالة من هذه الحالات الثلاثة، وذلك باستخدام قيد واحد في تغيير العلاقة بين طرفيه في كل حالة.

1- حالة كون العلاقى تساوي Equality Constraint

س1 – س2 = –30 لمعالجة هذه الحالة نقوم بضرب طرفي القيد في (-1) وذلك للحصول على الشكل الآتي:

– س1 + س2 = 30

حيث نلاحظ أن الطرف أصبح الآن مقبولا من حيث الشكل (+30).

2- حالة كون العلاقة أصغر من أو يساوي Less than or Equal Constraint

مثال: س1–س2 ≥ -30

لمعالجة مثل هذا الوضع، نقوم بضرب الطرفين في (-1) فتغيير اتجاه العلاقة بحيث تصبح أكبر من أ، يساوي بدلا من ≥ وذلك كما يلي:

$-س_1 + س_2 \leq 30$

3- حالة كون العلاقة أكبر من أو يساوي Greater than or Equal to Constraint

مثال: $س_1 - س_2 \leq -30$

نقوم بضرب الطرفين في (-1) وذلك للتخلص من القيمة السالبة في الطرف الأيسر من القيد، وهنا لا بد من تغيير اتجاه العلاقة بحيث تصبح مساو أو أصغر بدلا من مساو أو أكبر، وكما يأتي:

$-س_1 + س_2 \geq 30$

المتغيرات الإضافية والمتغيرات المصطنعة Surplus and Artificial Variablesقبل التحدث عن مشكلة تخيض التكاليف، لا بد من التحدث عن بعض المتغيرات الخاصة بهذه المشكلة، وهي المتغيرات الإضافي Surplus Variables والمتغيرات المصطنعة Artificial Variables والتي تضاف عندما تكون علاقة القيد على شكل (≤) أو على شكل معادلة، فإذا كان لدينا المثال الآتي:

تخفيض ر = $10س_1 + 6س_2 + 8س_3$

علما بأن:

$4س_1 + 5س_2 + 3س_2 \leq 320$

$2س_1+3س_2 = 100$

أولا فيما يتعلق بالقيد الأول:

$4س_1 + 5س_2 + 3س_3 \leq 320$

إن مثل هذا القيد ذز علاقة (≤) يستلزم طرح المتغير الإضافي منه بدلا من إضافة العامل الحر كما هو الحال في القيد ذو العلاقة (≥).

ويتم طرح المتغير الإضافي لتحويل القيد من حالة اللامساوة إلى حالة المساواة.

$4س_1 + 5س_2 +3س_3 - ح_1 = 320$

إن المتغير الإضافي يخبرنا بالكمية التي زاد فيها الحل عن المصادر المحددة.

فإذا كان س1=25، س2=20، س3=50.

فإن كمية الإضافية هي 30.

الآن وإذا افترضنا أننا نريد حل هذه المشكلة مبتدئين بنقطة الأصل حيث تكون جميع المتغيرات الحقيقية تساوي صفرا، فإن هذا يعني أن:

س1=س2=س3=0

ح1=-320

وهنا نلاحظ أن قيمة ح1 هي (-320) وهذا طبعا مخالف لأحد افتراضات البرمجة الخطية هو افتراض اللاسلبية.

ولحل مثل هذه المشكلة لا بد من القيام بخطوة أخرى وتتمثل هذه الخطوة بإضافة عامل مصطنع Artificial Variables للقيد وكما يلي:

4س1 + 5س2 + 3س3 - ح1 + أ1 = 320

حيث أ 1 يمثل العامل المصطنع في هذاالقيد والآن يمكن افتراض قيم

س1 = س2= س3 = ح1=0

و أ = 320

ولذا تخلصنا من مشكلة عدم الالتزام بقيد اللاسلبية.

ثانيا: فيما يتعلق بالقيد الثاني:

2س1 + 3س2 = 100

فإننا نحتاج لإضافة متغير مصطنع وذلك لإمكانية إدخال هذا القيد في جدول الطريقة المبسطة، وكالآتي:

2س1 + 3س2 + أ2 = 100

والسبب في إضافة المتغير المصطنع للقيد ذو علاقة بالتساوي هو ليس لحل مشكلة بسيطة كهذه ولكن لحل مشاكل تحتوي على متغيرات وقيود كثيرة حيث أننا بإضافة المتغير المصطنع وافتراض قيم المتغيرات الحقيقية تساوي صفرا فإنه يمكن إيجاد الحل الأولي.

هناك ملاحظة جديرة بالاهتمام ألا وهي أن المتغيرات المصطنعة ليس لها معنى بالواقع ولكنها عبارة عن وسائل حسابية للمساعدة في إيجاد الحل الأولي لمشكلة البرمجة الخطية وتختفي هذه المتغيرات من مزيج الحل قبل الوصول للحل الأمثل.

المتغيرات الإضافية والمصطنعة في دالة الهدف:

Surplus and Artificial Variables in the Objective Function

عند إضافة المتغيرات الإضافية و/أو المصطنعة للقيود، لا بد لهذه المتغيرات من أن تظهر كذلك في دالة الهدف، تماما كما حدث عندما أضفنا المتغيرات الحرة في حالة (≥)، ولما كان من الضروري إخراج المتغيرات المصطنعة من الحل، فهذا يعني أن بإمكاننا افتراض كلفة عالية لهذه المتغيرات، ومن الجدير بالذكر هنا أنه وفي حالة المشاكل التي تهدف إلى تخفيض التكاليف، فإن المتغيرات ذات الكلفة الأقل هي الأكثر تفضيلا لإدخالها للحل والمتغيرات التي تصاحبها كلفة عالية يجب إخراجها من الحل بسرعة، أو عدم إدخالها إلى الحل إطلاقا، وبدلا من وضع قيمة رقمية للمتغيرات المصطنعة (1000، 2000، 5000، 10000 دينار).

فإننا نستخدم الحرف (م) ليمثل رقما كبيرا جدا.

الآن يمكن كتابة دالة الهدف على الشكل التالي:

تخفيض ر= 10س1 + 6س2 + 8س3 + 0 (ح1) + م أ 1 + م أ 2

خلاصة للخطوات اللازمة لهيئة القيود بالشكل المناسب

Summary of the Steps to Create the Tableau Form

بعد الاستعراض السريع للحالات السابقة، يمكن أن نلخص الخطوات اللازمة لتهيئة القيود بالشكل المناسب لوضعها في المصفوفة إلى ما يأتي:

1- إذا كانت الصيغة الموضوعة لقيد أو أكثر تتضمن وجود رقم أو قيمة سالبة في الجانب الأيسر نقوم بضرب هذا القيد بناقص واحد (-1) ونغيراتجاه العلاقة للقيد المذكور، وهذا سيحل مشكلة اللاسلبية.

2- بالنسبة للقيود ذات العلاقة (≥) نقوم بإضافة العامل الحر Slack لتحويل هذا القيد إلى حالة المساواة، حيث يكون معامل العامل الحر في دالة الهدف صفرا، ويكون العامل الحر أحد عوامل الحل الأولي الممكن.

3- لمعالجة القيود في حالة المساواة نقوم بإضافة العامل المصطنع Artificial Variables، يكون معامل العامل المصطنع في دالة الهدف (-م) في حالة مشكلة تعظيم الأرباح و(م) في حالة مشكلة تقليل التكاليف، كذلك فإن هذا العامل المصطنع يصبح جزءا من الحل الأولي الممكن للمشكلة.

4- أما بالنسبة للقيود ذات العلاقة (≤) فإننا نقوم بمعالجتها كما يلي:

أ- طرح العامل الإضافي Surplus Variables وذلك لتحويله إلى حالة مساواة.

ب- إضافة العامل المصطنع Artificial Variables وذلك للتقيد بقيد اللاسلبية.

ويصبح هذا العامل المصطنع جزءا من الحل الأولي الممكن، ويكون معامله في دالة الهدف (-م) لمشكلة تعظيم الأرباح و(م) بالنسبة لمشكلة تقليل التكاليف.

4-4 مشكلة تخفيض التكاليف The Minimization Problem

إن مشكلة تخفيض التكاليف مشابهة لمشكلة تعظيم الأرباح والفرق الوحيد بينهما متعلق بالصف الأخير (ر ج - ز ج) ذلك أن هدفنا هنا هو تخفيض التكاليف، لذا فإن المتغير الذي سيدخل الحل سيكون ذلك المتغير الذي يصاحبه أكبر رقم سالب في الصف الأخير، لأن هذا المتغير سيؤدي إدخاله إلى تخفيض التكاليف أكثر من أي متغير آخر، كذلك فإننا نتوصل للحل الأمثل لمشكلة تخفيض التكاليف عندما نجد أن الأرقام في الصف الأخير (ر ج - ز ج) كلها مساوية أو أكبر من صفر (≤ 0) أي عكس حالة تعظيم الأرباح التي تتطلب كما عرفنا أن تكون القيم في الصف الأخير (ر ج -ز ج) كلها مساوية أو أصغر من صفر (≥ 0).

ويمكن إجمال الخطوات السابقة التي نتبعها والتي هي مشابهة لخطوات مشكلة تعظيم الأرباح بما يأتي:

الخطوات The Steps

1- تحديد المتغير الذي يصاحبه أكبر رقم سالب في الصف الأخير (ر ج - ز ج) ليدخل الحل أولا، أي أننا نختار المتغير الذي يقلل الكلفة أكثر من غيره إن هذا التحديد يعني تحديد عمود الارتكاز أ، العمود المحوري .Pivot Column

2- تحديد المتغير الذي سيخرج من الحل وبالتالي تحديد الصف المحوري أو صف الارتكاز Pivot Row وبنفس الأسلوب الذي اتبعناه في حالة تعظيم الأرباح.

3- احتساب القيم الجديدة لصف الارتكاز الجديد.

4- احتساب القيم الجديدة للصفوف الأخرى.

5- ملاحظة فيما إذا كانت القيم في الصف الأخير كلها (≥) فهذا يعني أننا وصلنا للحل الأمثل أما إذا لم تكن كذلك نعود للخطوة الأولى ولحين الوصول للحل الأمثل.

مثال تطبيقي:

دعنا الآن نعود لمثالنا المتعلق بمزرعة الدواجن وبخلطة الأعلاف المتعلقة بالدواجن، ونحاول حلها بواسطة الطريقة المبسطة:

نحن نعلم أن المشكلة تتعلق بتخفيض التكاليف.

تخفيض ر = 20س1 + 20س2

علما بأن:

10س1 + 5س2 ≥ 50 (القيد المتعلق بمكون أ)

5س1 + 10س2 ≥ 40 (القيد المتعلق بمكون ب)

س1، س2 ≥ 0 (قيد اللاسلبية).

في البداية لا بد من طرح المتغيرات الإضافية والمصطنعة من القيود لكي تتحول إلى حالة مساواة، ومن ثم إظهار هذه المتغيرات الجديدة في دالة الهدف وكما يأتي:

تخفيض ر = 20س1 + 20س2 + 0 (ح1) + 0 (ح2) + م أ 1 + م أ 2

علما بأن:

10س1 + 5س2 – ح1 + أ 1 = 50

5س1 + 10س2 – ح2 + أ 2 = 40

س1، س2، ح1، ح2، أ 1، أ1 ≥ 0

جدول رقم (4-7)

جدول الطريقة المبسطة الأول

مزيج الحل	ر ج	س1	س2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية	النسبة
	↓	20	20	0	0	م	م		
أ1	م	(10)	5	-1	0	1	0	50	$\frac{50}{10} = 5$
أ2	م	5	10	0	0	0	1	40	$\frac{40}{5} = 8$
ز ج		15م	15م	-م	-م	م	م	90 م	
ر ج - ز ج		-15م +20	-15م +20	م	م	0	0		

↑ عمود الارتكاز (عمود س1)

حيث يلاحظ من هذاالجدول أن المتغيرات الأساسية ممثلة بالمتغيرات المصطنعة (أ1، أ2) وأن كلفة هذا الحل تساوي 90م، وهي كلفة عالية جدا كما يلاحظ من الصف الأخير (رج-زج) أن هناك إمكانية لتحسين هذا الحل (تخفيض التكاليف) ذلك أن هناك قيم مساوية أو أصغر من صفر، وهذا يعني أن الحل ليس هو الحل الأمثل، ولذا لا بد من تطويره ويتم من خلال تتبع الخطوات الآتية:

1- تحديد المتغير الذي سيدخل الحل:

يلاحظ من الجدول (4-7) أن، المتغيرات س1 وس2 يصاحب كل منهما قيمة سالبة في الصف الأخير، كما يلاحظ أن هناك تعادل بينهما، أي أنه بإمكاننا اختيار أي منها لإخاله للحل، وافترض أننا اخترنا س1 ليدخل الحل، حيث يصبح عموده س1 هو العمود المحوري.

2- تحديد المتغير الذي سيخرج من الحل:

ويتم ذلك كما أشرنا سابقا من خلال احتساب النسبة بين الأرقام في عمود الكمية والأرقام في عمود الارتكاز واختيار العامل وبالتالي الصف الذي يصاحب أقل رقم موجب يلاحظ من الجدول (4-7) أن المتغير أ1 سيترك الحل، وهذا يعني أن صف أ1 هو الصف المحوري.

3- احتساب القيم للصف المحوري الجديد:

ويتم ذلك كما أشرنا سابقا من خلال تقسيم الأرقام في الصف المحوري القديم على الرقم المحوري وكما يأتي:

1 = 10 ÷ 10	عمود س1
0,5 = 10 ÷ 5	عمود س2
0,1- = 10 ÷ 1-	عمود ح1
0 = 10 ÷ 0	عمود ح2
0,1 = 10 ÷ 1	عمود أ1
0 = 10 ÷ 0	عمود أ2
5 = 10 ÷ 50	عمود الكمية

وتثبت القيم الجديدة في الجدول الجديد وكما يوضح الجدول رقم (4-8) .

4- احتساب القيم الجديدة للصفوف الأخرى وباستخدام نفس المعادلة السابقة أ- للصف أ1.

القيم الجديدة للصف أ2:

0 = (10 x 5) - 5	عمود س1
7,5 = (0,5 x 5) - 10	عمود س2
0,5 = (0,1- x 5) - 0	عمود ح1
1- = (0 x 5) - 1-	عمود ح2
0,50- = (0,1 x 5) - 0	عمود أ1
1 = (0 x 5) - 1	عمود أ2
15 = (5 x 5) - 40	عمود الكمية

جدول رقم (4-8)

مزيج	رج	س1	س2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية	النسبة
الحل	↓	20	20	0	0	م	م		
س1	20	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0	5	$10 = \frac{5}{\frac{1}{2}}$
أ1	م	0	($\frac{15}{2}$)	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{1-}{2}$	1	15	$2 = \frac{15}{\frac{15}{2}}$
زج	الرقم الحوري	20	$\frac{15م}{2}$ 10+	$\frac{10-م}{2}$	م−	1م- 10+	م	15م+ 100	
رج - زج		0	$\frac{15م-}{2}$ 10+	$\frac{10+م}{2}$	م	$\frac{3م}{2}$ 10-			

صف الارتكاز: أ1

عمود الارتكاز: س2

ب- للصف زج:

20 x 1 + م (0) = 20 — عمود س1

20 x 2/1 + م (2/15) = 15/م + 10 — عمود س2

20 x (1-/10) + م (2/1) = 2م - 10 — عمود ح1

20 x (0) + م (1-) = −م — عمود ح2

20 x (10/1) + م (1-/2) = 1-/2م + 10 — عمود أ1

20 x (0) + م (1) = م — عمود أ2

20 x (5) + م (15) = 15 م + 100 — عمود الكمية

ج- للصف رج - زج

20 - 20 = 0 — عمود س1

20 - (15/2م + 10) = 15-/2م +10 — عمود س2

0 - (2/م - 10) = −م /2+10 — عمود ح1

0 - (-م) = م   عمود ح2

م - (-1/2م + 10) = 3/2م - 10   عمود أ1

م - م = 0   عمود أ2

5- هل هذا هو الحل الأمثل؟؟

للإجابة على هذا السؤال نتفحص القيم الموجود في الصف الأخير للجدول رقم (4-8) فإذا كانت كل القيم (≤ 0) فهذا يعني إننا وصلنا للحل الأمثل، أما إذا كانت هناك أية قيمة سالبة فهذا يعني أننا لم نصل بعد للحل الأمثل، الملاحظ من الجدول رقم (4-8) أن هناك بعض القيم السالبة وبالتالي لم نصل بعد للحل الأمثل وأن هناك إمكانية لتحسين الحل حيث نعود للخطوة الأولى.

تطوير الجدول الجديد:

يمكن تطوير الجدول الجديد والذي يبين الحل الجديد من خلال تطبيق الخطوات الخمسةالمشار إليها سابقا:

1- يلاحظ من الجدول رقم (4-8) أن أكبر رقم سالب يصاحبالمتغير س2 ولذا فهو المتغير الذي سيدخل الحل في المرة القادمة، والعمود س2 هو العمود المحوري.

2- أما المتغير الذي يسخرج من الحل فهو أ1، وصفه هو الصف المحوري.

3- إيجاد القيم للصف المحوري الجديد وذلك من خلال تقسيم القيم في الصف المحوري القديم على الرقم المحوري، أي:

$$\frac{15}{2} = 0 \text{ ، } \frac{15}{2} \div \frac{15}{2} = 1 \text{ ، } 1 \div \frac{15}{2} = 1 \text{ ، } -1 \div \frac{15}{2} = -2 \text{ ، } -1 \div \frac{15}{2} = -1$$

$$1 \div \frac{15}{2} = 2 \text{ ، } \frac{15}{2} \div \frac{15}{2} = 2$$

4- إيجاد القيم للصفوف الأخرى وبنفس الأسلوب الذي اتبعناه في الصفحات السابقة، الجدول رقم (4-9) يبين النتائج النهائية لهذه الخطوة، والخطوات السابقة.

5- بالنظر إلى الصف الأخير الجدول رقم (4-9) نلاحظ أن كل القيم موجبة (≤0) وهذا يعني أننا وصلنا للحل الأمثل حيث:

س$_1$ = 4

س$_2$ = 2

وقيمة الحل الأمثل = 120

جدول رقم (4-9)

مزيج الحل	ر ج	س$_1$	س$_2$	ح$_1$	ح$_2$	أ$_1$	أ$_2$	الكمية	النسبة
	↓	20	20	0	0	م	م		
س$_1$	20	1	0	$\frac{-2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-1}{15}$	4	
س$_2$	20	0	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{15}$	2	
ز ج		20	20	$\frac{-20}{15}$	$\frac{-20}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{20}{15}$	120	
ر ج - ز ج		0	0	$\frac{20}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{-20}{15}$	$\frac{20}{15}$		

لقد قمنا بحل مشكلة تخفيض التكاليف متبعين الخطوات الخمسة والتي هي نفس الخطوات المتبعة في حالة تعظيم الأرباح باستثناء فرق واحد متعلق بالصف الأخير وكما ذكرت سابقا، وهذا الفرق متعلق بالمتغير الذي سيدخل الحل وكذلك في الحكم على الحل فيما إذا كان حلا أمثلا أم لا.

إلا أن هناك طريقة أخرى لحل مشكلة تقليل التكاليف وهذه الطريقةتقوم على أساس تغيير واحد فقط في المشكلة، أي تغيير المشكلة من مشكلة تقليل التكاليف إلى مشكلة تعظيم الأرباح، ويتم ذلك من خلال ضرب دالة الهدف بناقص واحد (-1) حيث نتبع بعد ذلك خطوات وإجراءات الطريقة المبسطة لحل مشكلة تعظيم الأرباح وكما شرحناها سابقا، وسنقوم الآن بشرح مثالنا السابق على الطريقة الثانية أي تحويله من مشكلة تخفيض للتكاليف إلى مشكلة تعظيم الأرباح مبتدئين بصياغة المثال على الطريقتين ثم حله.

المشكلة على أساس تخيض التكاليف	المشكلة على أساس تعظيم الأرباح
تخفيض ر= 20س1 + 20س2.	تعظيم ر= -20س1 - 20س2
مقيدين بما يأتي:	مقيدين بما يأتي:
10س1 + 5س2 ≤ 50	10س1 + 5س2 ≤ 50
5س1 + 10س2 ≤ 40	5س1 + 10س2 ≤ 40
س1 ، س2 ≤ 0	س1 ، س2 ≤ 0

حيث نلاحظ من الصيغة أعلاه أن الفرق الوحيد هو فقط في دالة الهدف، حيث ضربت دالة الهدف بناقص واحد (-1) لتحويلها من مشكلة تخفيض تكاليف إلى مشكلة تعظيم الأرباح، أي أن (ر = −ر) وسنقوم بتقديم الحل لهذه المشكلة (على أساس تحويلها من تخفيض لتعظيم) في الصفحات القادمة وبعد طرح المتغيرات الإضافية اللازمة وإضافة المتغيرات المصطنعة لها.

تعظيم ر= 20س1 - 20س2 - 0 (ح1) - 0 (ح1) - م أ1 - م أ2

مقيدين بما يأتي:

10س1 + 5س2 - ح1 + أ1 = 50

5س1 + 10س2 - ح2 + أ2 = 40

س1 ، س2 ، ح1 ، أ1 ، أ2 ≤ 0

والجداول الآتية تبين الحل المصاحب لهذه المشكلة:

جدول رقم (4-10)

مزيج	ر ج	س1	س2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية	النسبة
الحل		20-	20-	0	0	-م	-م		
أ1 (صف الارتكاز ←)	-م	(10)	5	1-	0	1	0	50	$5 = \frac{50}{10}$
أ1	-م	5	10	0	1-	0	1	40	$8 = \frac{40}{5}$
ز ج		-15م	-15م	م	م	-م	-م	-90م	
ر ج - ز ج		-20+ 15م	-20+ 15م	-م	-م	0	0		

↑ عمود الارتكاز (س1)

جدول رقم (4-11) النتائج بعد المحاولة الأولى

مزيج	ر ج	س1	س2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية	النسبة
الحل		20-	20-	0	0	-م	-م		
س1	20-	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0	5	$10 = \frac{5}{\frac{1}{2}}$
أ2 (صف الارتكاز ←)	-م	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{1-}{2}$	1	15	$2 = \frac{15}{\frac{15}{2}}$
ز ج		20-	$\frac{15-}{2}$	$\frac{-م}{2}$	م	$\frac{م}{2}$ 10-	-م	-15م 100-	
ر ج-ز ج		0	$\frac{15م}{2}$ 10-	$\frac{-م}{2}$ 10-	-م	$\frac{-3م}{2}$ 10+	0		

↑ عمود الارتكاز (س2)

جدول رقم (4-12) النتائج بعد المحاولة الثانية

مزيج الحل	ر ج	$س_1$	$س_2$	$ح_1$	$ح_2$	$أ_1$	$أ_2$	الكمية	النسبة
		20-	20-	0	0	−م	−م		
$س_1$	20-	1	0	$\frac{2-}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	4	
$س_2$	20-	0	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{2-}{15}$	$\frac{1-}{15}$	$\frac{2}{15}$	2	
ز ج		20-	20-	$\frac{20}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{20-}{15}$	$\frac{20-}{15}$	120-	
ر ج−ز ج		0	0	$\frac{20-}{15}$	$\frac{20-}{15}$	−م $\frac{20+}{15}$	−م $\frac{20+}{15}$		

حيث يلاحظ من الجدول رقم (4-12) أننا وصلنا للحل الأمثل حيث أن كل القيم في الصف الأخير (صف رج −زج) مساوية أو أصغر من الصفر (≤0)، وأن النتيجة هي نفس النتيجة التي توصلنا إليها من خلال حل المسألة كمسألة تخفيض تكاليف وبدون تحويلها إلى مشكلة تعظيم الأرباح ويلاحظ من الجدول الأخير أن الحل الأمثل هو:

$س_1 = 4$

$س_2 = 2$

وأن قيمة الحل الأمثل هي -120، وهي القيمة التي توصلنا إليها بالشكل المباشر مضروبة بناقص واحد (-1).

خلاصة للطريقة المبسطة

يمكن تلخيص إجراءات الطريقة المبسطة بالنقاط الآتية:

1- إدخال المتغيرات الحرة أو الإضافية والمصطنعة وذلك حسب طبيعة القيد.

2- تحدي المتغير الذي سيدخل الحل في المرة القادمة مع مراعاة الهدف المتوخى (تعظيم الربح أو تخفيض التكاليف) ذلك أن المتغير الذي سيدخل الحل في حالة تعظيم الأرباح هو الذي يصاحبه أكبر رقم موجب، في حين يدخل الحل في حالة تخفيض التكاليف المتغير الذي يصاحبه أكبر رقم سالب.

3- تحديد المتغير الذي سيترك الحل، وهو المتغير الذي يصاحبه أصغر قيمة موجبة في عمود النسبة (ناتج قسمة الأرقام في عمود الكمية على الأرقام في عمود الارتكاز).

4- تطوير الحل الجديد وذلك باحتساب القيم الجديدة للصفوف المختلفة.

5- التأكد فيما إذا كان الحل الأمثل أو لا، وذلك من خلال ملاحظة القيم الموجبة في الصف الأخير، والتأكد فيما إذا كانت مطابقة مع مطالبات الحل الأمثل أم لا .

5-4 حالات خاصة لمشكلة البرمجة الخطية Special Issues in (LP)

سنستعرض في هذا الجزء من الفصل بعض الحالات والمشاكل الخاصة التي تبرز عند محاولتنا حل مشكلة البرمجة الخطية بواسطة الطريقة المبسطة، علما بأننا كنا قد استعرضنا هذه الحالات عند شرح طريقة الرسم لحل مشكلة البرمجة لخطية وذلك في الفصل الثالث.

سيتم التركيز في هذا الجزء على الحالات الأربعة الآتية:

1- **تعذر الوصول إلى الحل** Infeasibility

ويعني هذا عدم وجود حل يفي باحتياجات كل قيود المشكلة، ونلاحظ ذلك عند استخدام الطريقة المبسطة عندما نصل إلى الجدول الأخير ونجد أن كل الأرقام في الصف الأخير (ر ج – ز ج) في الشكل المناسب والذي يعني أو يشير الوصول للحل الأمثل،ولكن هناك عامل مصطنع لا يزال موجودا في مزيج الحل بين العوامل الأساسية وبقيمة موجبة أي أن كل القيم في الصف الأخير (0≥) في حالى تعظيم الأرباح، والذي يوحي بالوصول للحل الأمثل ولكن هناك عامل مصطنع لا زال في الحل وبقيمة موجبة والجدول رقم (4-13) والذي يمثل الحل لإحدى المشاكل يبين ذلك.

الجدول رقم (4-13)

يبين حالة تعذر الوصول للحل

مزيج الحل	ر ج	س1	س2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية
	↓	5	8	0	0	م	م	
س1	5	1	0	2-	3	1-	0	200
س2	8	0	1	1	2	2-	0	100
أ 2	م	0	0	0	1-	1-	1	20
ز ج		5	8	2-	-م-31	-م-21	م	20م+ 1800
ر ج-ز ج		0	0	2	م-31	م+21	0	

حيث يلاحظ من الجدول أعلاه أن القيم في الصف الأخير بالشكل المناسب (≤0)، ولكن هناك عامل مصطنع (أ2) لا زال في الحل وبقيمة موجبة قدرها 20، وهذا يعني وجود حل لهذه المشكلة.

2- **عدم توفر الحدود** Unboundedness

وهذا يعني عدم وجود حدود على الحل، ويحدث ذلك في حالة تعظيم الأرباح عندما يكون بالإمكان زيادة أحد العوامل الداخلة في الحل بشكل غير محدود وبالتالي زيادة الأرباح إلى ما لا نهاية ودون مخالفة لا من القيود المشكلة.

إذا حدث وأن واجهنا مثل هذه الحالة في الحياة العملية فهذا يعني أن مشكلة البرمجة الخطية موضوع البحث قد صيغت بطريقة غير مناسبة أو بالشكل غير المناسب، ذلك أنه من المستحيل زيادة الأرباح عمليا بشكل لا محدود.

ويمكن اكتشاف هذه المشكلة عند استخدام الطريقة المبسطة قبل الوصول للحل النهائي، ويحدث ذلك عندما نريد أن نحدد أي العوامل يجب إخراجه من الحل وعندما إيجاد النسبة (الأرقام في عمود الكمية ÷ الأرقام في عمود الارتكاز) وتكون النتيجة إما

سالبة أو غير محددة (∞) InFinite أو اي مزيج بينهما، والجدول رقم (4-14) يوضح هذه الحالة.

جدول رقم (4-14)

حالة عدم توفير حدود لكل المشكلة

مزيج الحل	ر.ح	س1	س2	ح1	ح2	الكمية	النسبة
		6	9	0	0		
س1	9	1-	1	2	0	30	30÷-1 =-30
س 2	0	2-	0	1-	1	10	10÷-2 =-5
ز . ح		9-	9	18	0	270	
ر.ح - ز.ح		15	0	18-	0		

العمود المحوري

حيث يلاحظ من الصف الأخير في الجدول أعلاه أن هذا الحل ليس هو الحل الأمثل وبالتالي لا بد من العودة للخطوط الأولى وذلك لتحديد العامل الذي سيدخل الحل وكذلك الخطوة الثانية لتحديد العامل الذي سيترك الحل، من الجدول أعلاه نلاحظ أن العامل الوحيد الذي يمكن إدخاله في المرة القادمة هو س1، حيث أن الوحدة الواحدة المنتجة والمباعة منه يؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار 15 دينارا، إذا العمود س 1 هو العمود المحوري.

الخطوة الثانية هي لتحديد أي العوامل (س2 أم ح2) سيخرج من الحل، ولتحديد ذلك نقوم باستخرج النسبة ونختار العامل الذي يصاحبه أصغر قيمة موجبة حيث يلاحظ من عمود بالنسبة في الجدول أعلاه أن ناتج القسمة لكلا العاملين (س2 وح2) هو سالب، وهذا يعني أن الحل لهذه المشكلة غير محدود.

3- الدورانية (الانحلال أو التفسخ) Degeneracy

وتبرز هذه المشكلة عند وجود قيد فائض Redundant Constraint، حيث يكون واحد أو أكثر من قيود المشكلة سببا في جعل قيد آخر غير مهم وغير ضروري، فعلى سبيل المثال إذا كانت القيود لإحدى المشكل كما يأتي:

س1 ≤ 10 ، س2 ≤ 10 ، س1 + س2 ≤ 20، فإن القيد الأخير غير ضروري ذلك أن القيدين الأول والثاني قيدا فائضا.

وتبرز مشكلة الدورانية أو التفسخ عند احتساب النسبة (الأرقام في عمود الكمية ÷ الأرقام في عمود الارتكاز) وكان هناك تعادل (Tie)، أي أن النسبة الأقل متساوية لأكثر من صف، فهذا يعني أن هناك دورانية في الحل، أن وجود تعادل في النسبة الأقل يعني أن قيمة أحد العوامل الساسية في الجدول القادم تساوي صفرا، إن وجود قيمة صفرية لأي من العوامل السلبية في الجدول الأخير (جدول الحل الأمثل) لا تشكل مشكلة، ولكنها تشكل مشكلة إذا كانت هذه القيمة قد برزت قبل الوصول للحل الأمثل، ذلك أن هذا يستدعي الدوران (التحرك للخلف والأمام) وقد يؤدي ذلك إلى عدم الوصول للحل الأمثل. ولكن وبشكل عام وإذا حصل تعادل في النسبة الأقل لمشكلة برمجة خطية فإننا ننصح باختيار الصف The Upper Row في الجدول المذكور لكي يكون الصف المحوري أو صف الارتكاز، الجدول رقم (4-15) يبين هذه الحالة .

جدول رقم (4-15) حالة الدورانية أو التفسخ في الحل

مزيج	ر ج	س1	س2	س3	ح1	ح2	ح3	الكمية	النسبة
الحل	↓	5	8	2	0	0	0		
س1	8	$\frac{1}{4}$	1	1	2	0	0	10	1÷10 40 = 4
ح2	0	4	5	$\frac{1}{3}$	1-	1	0	20	4÷20 5 =
ح3	0	2	5	2	$\frac{2}{5}$	0	1	10	2÷10 5 =
ز ج		2	8	8	16	0	0	80	
ر ج-ز ج		3	0	6-	16-	0	0		

↑ عمود الارتكاز

حيث يلاحظ من الجدول أعلاه أن س 1 سيدخل الحل في المرة القادمة، كما يلاحظ أن هناك تعادل بين الصفين ح2 وح3 وفيما يتعلق بالنسبة الأقل، وهذا يعني أن هذا الحل تصاحبه الدورانية، وفي مثل هذه الحالة ننصح باختيار صف ح2 ليكون صف الارتكاز ونترك الفرصة لاختبار فهمك للمادة للاستمرار في الحل.

4- **وجود أكثر من حل أمثل** Alternate Optimal Solution

عند وجود حلين أمثلين أو أكثر لمشكلة البرمجة الخطية، نقول بأن هذه المشكلة لها حلول مثالية متعددة، نستطيع التعرف على هذه الحالة عند حل المشكلة بوساطة الطريقة المبسطة، وذلك عند الوصول إلى الحل الأخير (الأمثل) ذلك أن القيم في الصف رج-زج ستكون مساوية للصفر لعامل أو أكثر من العوامل غير الداخلة في مزيج الحل، والجدول الجدول رقم (4-16) يبين هذه الحالة.

جدول رقم (4-16)

حالة وجود أكثر من حل أمثل

مزيج الحل	ر.ج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية
		3	2	0	0	
س2	2	$\frac{3}{2}$	1	1	0	6
ح 2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
ز . ح		3	2	2	0	12
ر.ج - ز.ج		0	0	2-	0	

ويلاحظ من الصف الأخير للجدول السابق أن هذا الحل هو الحل الأمثل للمشكلة ذلك أن كل القيم مساوية أو أصغر من صفر (≤0) وأن:

س2 = 6، ح1 = 3 وقيمة الحل = 12.

الملاحظ كذلك أن هناك قيمة صفرية في الصف الأخير (رج-زج) وتحت العامل س1، علما بأ، س1 ليس أحد مكونات مزيج الإنتاج وهذا يعني أن هناك أكثر من حل أمثل لهذه المشكلة بمعنى أن بإمكاننا إدخال س1 للحل، وأن هذا سوف يعطيها نفس قيمة الحل السابق وكما يوضح الجدول رقم (4-17).

الجدول رقم (4-17)

يبين حالة وجود أكثر من حل أمثل

مزيج الحل	ر.ح	$س_1$	$س_2$	$ح_1$	$ح_2$	الكمية
		3	2	0	0	
$س_1$	3	1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$س_2$	2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-}{2}$	$\frac{3}{2}$
ز.ح		3	2	2	0	12
ر.ح - ز.ح		0	0	2-	0	

حيث يلاحظ من الحل الجديد أن:

$س_1$=3، $س_2$=3/2 وأن قيمة الحل =12 وهي نفس الحل السابق.

تمارين

1- يعمل أحد المحال التجارية في بيع نوعين من الملابس (أ وب) يبلغ ربح القطعة من أ دينارين ومن ب 3 دنانير، تحتاج القطعة من الأول إلى 4 دقائق من وقت رجل البيع ودقيقتين من وقت الصندوق، بينما تحتاج القطعة من الثاني إلى 5 دقائق من رجل البيع ودقيقتين من وقت الصندوق، هذا علما بأنه يوجد لدى المحل إثنان من رجال البيع وموظف صندوق واحد يعملون بمعدل 8 ساعات يوميا.

فما هي كمية المبيعات اليومية التي تحقق أعلى ربح ممكن؟

أ- باستخدام الرسم البياني.

ب- باستخدام الطريقة المبسطة.

2- ترغب إحدى الشركات بإنتاج خمسة منتجات هي (أ، ب، جـ، د، هـ) وفقا للمعطيات التالية:

أ- رأس المال المعد للاستثمار= 1.5 مليون دينار.

ب- عدد أيام العمل اللازمة للإنتاج = 15000 يوما.

ج- متطلبات الوحدات من رأس المال والعمل هي:

منتج	احتياجات الوحدة بالألف دينار	احتياجات الوحدة بالأيام	ربح الوحدة بالألف دينار
أ	25	250	15
ب	20	150	9
ج	20	200	12
د	15	100	8
هـ	20	150	1-

والمطلوب هو إيجاد أفضل خطة إنتاج

3- تقوم إحدى الشركات بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات (أ، ب، جـ) وفقا للمعلومات التالية:

النوع	احتياجات الوحدة من وقت الآلات بالدقيقة	احتياجات الوحدة من وقت العمال بالدقيقة	تكلفة الوحدة	سعر بيع الوحدة
أ	3	40	10	15
ب	4	50	15	22
جـ	5	60	30	23

تعمل هذه الشركة خمسة أيام في الأسبوع وبمعدل 16 ساعة يوميا، فإذا كان يوجد لدى هذه الشركة خمسة آلات وستون عاملا وتبلغ ميزانية الإنتاج الأسبوعية بها 12000 دنانير فما هي خطة الإنتاج التي تحقق لها أعلى ربح ممكن؟

4- تقوم إحدى الشركات بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات التي يحتاج كل منها لإنتاجه إلى ثلاثة أنواع من المواد الخام هي هي (أ، ب، جـ) تبلغ تكلفة الطن الواحد من المادة الأولى 3 دنانير وأقصى ما يمكن توفيره منها هي 1000 طن.

تبلغ تكلفة الطن الواحد من الثانية دينارين وأقصى ما يمكن توفيره منها هو800 طن.

أما المادة الثالثة فتبلغ تكلفة الطن منها 4 دنانير والكميات المتوفرة منها ليست محدودة. أي أننا نستطيع أن نؤمن أي كمية نريدها والمطلوب هو تحديد ما يمكن إنتاجه من المنتجات الثلاثة بهدف زيادة الأرباح في ظل المعلومات التالية:

احتياجات الوحدة من المواد

نوع المنتج	الخام (أ)	بالطن (ب)	(ج)	سعر البيع
1	5	10	10	130
2	7	8	5	140
3	10	5	لا شيء	100

ملاحظة يمكن إضافة أي افتراض تعتقد أنه ضروري لتسهيل عملية الحل.

5- يرغب أحد المتاجر بفتح قسم جديد لعرض البضاعة بمساحة مقدارها 10,000 قدم مربع، ويوجد لدى هذا المتجر أربعة منتجات يرغب بعرضها.

نوع المنتج	تكلفة الوحدة بالدينار	سعر بيع الوحدة	المساحة التي تحتاجها الوحدة بالقدم المربع
أ	60	80	24
ب	100	115	20
ج	200	270	35
د	250	250	55

وترى هذه الشركة بأن الكمية المعروضة من كل نوع يجب أ، لا تقل عن عشر وحدات. فما هي الكمية التي يجب أن تعرض من كل نوع إذا كانت الميزانية المتوفرة لشرائها جميعها هي 500,000 دينار، علما بأن هدف هذا المتجر زيادة أرباحه، هذا على افتراض أن المنتجات يمكن تجزئتها (قابلة للتقسيم).

6- ترغب إحدى الشركات المالية باستثمار مليون دينار في أربعة من أوجه الاستثمار وذلك وفقا للشروط التالية:

استثمار	نسبة المردود السنوية
أ	7
ب	9
جـ	10
د	14

1- الكمية المستثمرة في (جـ) يجب أن لا تزيد عن الكمية المستثمرة في (أ).

2- كل دينار تم استثماره في (د) يجب أن يقابله استثمار في (أ).

3- الكمية المستثمرة في (د) يجب أن لا تتجاوز 25% من إجمالي الاستثمار.

فما هي أوجه الاستثمار التي تحقق أعلى مردود سنوي لهذه اشلركة.

7- تقوم إحدى الشركات بدراسة تحديد العدد المناسب من رجال البيع في ثلاثة مناطق (أ، ب، جـ) ويوجد لدى هذه الشركة مئة من رجال البيع وتبلغ قيمة المبيعات والتكاليف السنوي لكل رجل في المناطق المختلفة كما يلي:

منطقة	قيمة المبيعات بالدينار	تكلفة رجل البيع
أ	25000	5000
ب	18000	11000
جـ	31000	7000

ويوجد لدى هذه الشركة ميزانية مصروفات لرجال البيع مقدارها 700,000 دينار.

فما هو العدد المناسب من رجال البيع في كل منطقة بشكل يؤدي إلى زيادة مردودات المبيعات هذا مع العلم بأنه يجب أن لا يقل عدد رجال البيع في كل منطقة عن عشرة أشخاص؟

8-حلل ما يلي باستخدام الطريقة المبسطة

خفض $4س_1 + 3س_2$

علما بأن

$2س_1 + س_2 \geq 10$

$-3س_1 + 2س_2 \geq 6$

$س_1 + س_2 \geq 6$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

9- حلل ما يلي باستخدام الطريقة المبسطة

عظم $10س_1 + 5س_2$

علما بأن

$3س_1 + 9س_2 \leq 27$

$8س_1 + 6س_2 \leq 48$

$-4س_1 + 6س_2 \geq -12$

$8س_1 + 12س_2 \geq -12$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

10- حلل ما يلي باستخدام الطريقة المبسطة

خفض $6س_1 + 4س_2$

علما بأن

$3س_1 + 2س_2 \geq 18$

$2س_1 + 4س_2 = 20$

$2س_2 \leq 8$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

11- حلل ما يلي باستخدام الطريقة المبسطة

عظم $س_1 + س_2$

علما بأن

$س_1 - س_2 \geq -1$

$-س_1 + 2س_2 \leq 4$

$س_1 ، س_2 \geq 0$

12- تقوم إحدى شركات صناعة الأدوات الكهربائية بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات (أ، ب، جـ).

يبلغ ربح الوحدة من كل منها وعلى التوالي 45, 170, 210 دينارا.

تمر كل وحدة من هذه المنتجات بثلاثة مراحل إنتاجية هي التصنيع، التجميع، ومن ثم الفحص والاختبار، وفيما يلي عدد الساعات التي يحتاجها تصنيع كل وحدة من المنتجات في الأقسام الثلاثة.

المنتج	التصنيع	التجميع	الاختبار
	عدد الساعات التي تحتاجها كل وحدة		
أ	3	3	1
ب	4	2	4/3
جـ	1	2/1	2/1

أما ساعات العمل الأسبوعية المتوفرة في الأقسام الثلاثة وبالتوالي (400، 350، 200).

ما هي أفضل خطة إنتاج أسبوعية يمكن أن تتبعها هذه الشركة؟

13- تقوم إحدى شركات صناعة الأعلاف بإنتاج نوع من الأعلاف يتكون من ثلاثة أصناف هي (أ، ب، جـ) تبلغ تكلفة كل كيلو غرام من هذه الأصناف كما يلي:

العنصر	سعر الكيلو غرام
أ	0.2 دينار
ب	0.24 دينار
جـ	0.30 دينار

وبعد مزج هذه الأصناف الثلاثة توضع بأكياس سعة كل منها 10 كغم وفقا للقيود التالية:

يجب أن لا يحتوي الكيس على أكثر من ٥ كغم من الصنف (أ)، يجب أن لا تزيد الكمية المستعملة من (أ) عن ضعفي تلك المستعملة من (جـ).

تشترط دائرة المواصفات بأن لا تقل كمية البروتين في هذه الخلطة عن 60% من الوزن، هذا مع العلم بأن نسبة البروتين في الأصناف الثلاثة موزعة بالكش التالي:

الصنف	نسبة البروتين %
أ	50
ب	80
جـ	60

والمطلوب هو استخدام البرمجة الخطية لتحديد الخلطة المناسبة لكل كيس (10 كغم) يحقق أقل التكاليف.

14- تبلغ ميزانية الإعلان والترويج في إحدى الشركات 100,000 دينار، وتدرس هذه الشركة اختيار وسائل الإعلان المناسبة من بين ثلاثة منها وهي:

وسيلة الإعلان	تكلفة الإعلان
الصحف	3000 دينار
المجلات	2000 دينار
التلفزيون	5000 دينار

وتفيد خبرة هذه الشركة بأن معايير فعالية كل من هذه الوسائل كانت كما يلي:

وسيلة الإعلان	معيار فعالية الإعلانات
الصحف	20
المجلات	30
التلفزيون	25

ولا ترغب هذه الشركة بأن تخصص أكثر من نصف ميزانيتها إلى الإعلانات التلفزيونية، كما أنها لا تريد أن تضع أكثر من 12 إعلانا في الصحف ولا أكثر من 12 إعلانا في المجلات.

كيف يتم توزيع هذه الميزانية بشكل يحقق أعلى فعالية ممكنة.

15- حل الأسئلة من (1-5) في الفصل السابق باستخدام الطريقة المبسطة.

16- حاول استخدام الحاسوب لحل جميع أو بعض الأسئلة السابقة، ومن ثم قارن بما كنت قد توصلت إليه قبل استعمال الحاسوب.

الفصل الخامس

تحليل الحساسية ونظرية الحل الثنائي

Sensitivity Analysis and Duality Theory

5-1 تحليل الحساسية

5-1-1 مقدمة:

لقد توصلنا للحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية تحت مجموعة من الافتراضات من بينها افتراض التأكد، وهذا يعني أن افتراضنا حالة تامة من التأكد فيما يتعلق بالمعلومات والعلاقات المختلفة المتعلقة بالمشكلة قيد البحث، فعلى سبيل المثال فقد افترضنا ثبات الأسعار والمعرفة التامة بالمصادر المتاحة وكذلك احتياجات العوامل المختلفة....إلخ.

لكن الواقع أن الظروف التي تعيشها المؤسسات ليست ثابتة أو معروفة، بل هي متغيرة فأسعار المواد الأولية متغيرة مع الزمن على سبيل المثال وأسعار الأسهم والسندات متغيرة. وهناك دوران في الأيدي العاملة، وكذلك هناك تغير تكنولوجي مستمر قد يستدعي استبدال المكائن القديمة بمكائن جديدة أكثر تطورا وأعلى طاقة إنتاجية.

بناء على ما تقدم فإنه من المهم للإدارة التعرف على ما يحصل للحل الأمثل الذي توصلنا إليه تحت افتراضات معينة، إذا ما كان هناك تغيير في المعلومات التي اعتمد عليها النموذج المستخدم، أي أن الإدارة مهتمة في إيجاد إجابة للأسئلة التالية:

1- ما هو تأثير التغير في معاملات العوامل في دالةالهدف؟

2- ما هو تأثير التغير في الجهة اليسرى من القيود (المصادر المتاحة)؟

3- ما هو تأثير التغير في معاملات العوامل في معاملات القيود (احتياجات العوامل)؟

4- ما تأثير إضافة قيد جديد؟

5- ما تأثير إضافة متغير جديد؟

أن الوسيلة المستخدمة لتغطية هذا الموضوع هي ما يسمى بتحليل الحساسية Sensitivity Analysis أو تحليل ما بعد المثالية Post Optimlity Analysis أو تحليل ماذا لو What if Analysis.

إن هذه التحليل يساعد الإدارة على إجابة الأسئلة المتعلقة بما قد يحدث لو أجرينا بعض التغييرات أو واجهتنا بعض الظروف غير المتوقعة.

وهذه الإجابات لا تتعلق بالأخطاء المتعلقة بالتقديرات البيانية للعوامل المختلفة كالمساهمة، والاستخدامات، والموارد المتاحة، ولكنها متعلقة أيضاً بخبرات الإدارة في تخمين التغيرات المستقبلية المتوقعة والتي يمكن أن تؤثر على إنجاز المؤسسة.

فإذا ما قدر لنا إيجاد الأمثل، فإننا نستطيع التحقق من أهمية معرفة مدى حساسية هذا الحل لافتراضات النموذج وكذلك المعلومات المستخدمة، وعلى سبيل المثال إذا تحققت الشركة الوطنية للتجارة أن الربح المتحقق من بيع مكتب واحد هو 5.5 دينار وليس 5 دنانير. ماذا يعني هذا التغيير. أي ما هو تأثيره على مزيج الحل وكذلك على الربح.

إن تحليل الحساسية يستخدم عادة لفحص أو التعرف على التأثير الناتج عن المتغيرات التي تحدث في خمسة جهات هي:

أ- مساهمات العوامل Contribution Rates.

ب- احتياجات العوامل Technological Coefficients.

جـ- المصادر المتاحة Available Resources.

د- اضافة قيد جديد.

هـ- اضافة متغير جديد.

5-2:1 الطرق أو المداخل المستخدمة في تحليل الحساسية

Approaches to Determine How Sensitive an Optimal Solution is to Change:

1- **مدخل المحاولة والخطأ** Trial and Error Approach

يعتمد هذا المدخل على إعادة حل المشكلة وذلك عند حدوث أي تغيير، ويعتبر هذا المدخل غير مرغوب فيه، ذلك أنه يستهلك وقتاً كبيراً لا سيما إذا كنا نواجه حالة نريد فيها اختبار سلسلة من التغيرات المحتملة ولو أن توفر الحاسوب والبرامج المعدة مسبقا قد سهل القيام بهذا العمل.

2- **مدخل ما بعد المثالية** Post Optimality Approach

تعتمد هذه الطريقة على استخدام آخر جدول وصلنا له عند استخدام الطريقة

المبسطة (جدول الحل الأمثل) وذلك لتحديد مدى التغيرات في مؤشرات المشكلة والتي لا تؤثر على الحل الأمثل أو لا تؤثر على مزيج الحل وسنقوم باعتماد هذا المدخل مستخدمين طريقة الرسم وكذلك الطريقة المبسطة.

مثال: دعنا نعود لمثالنا السابق والمتعلق بالشركة الوطنية لصناعة الأثاث والمتمثلة صياغة بما يأتي:

تعظيم ر= 5س1+ 3س2

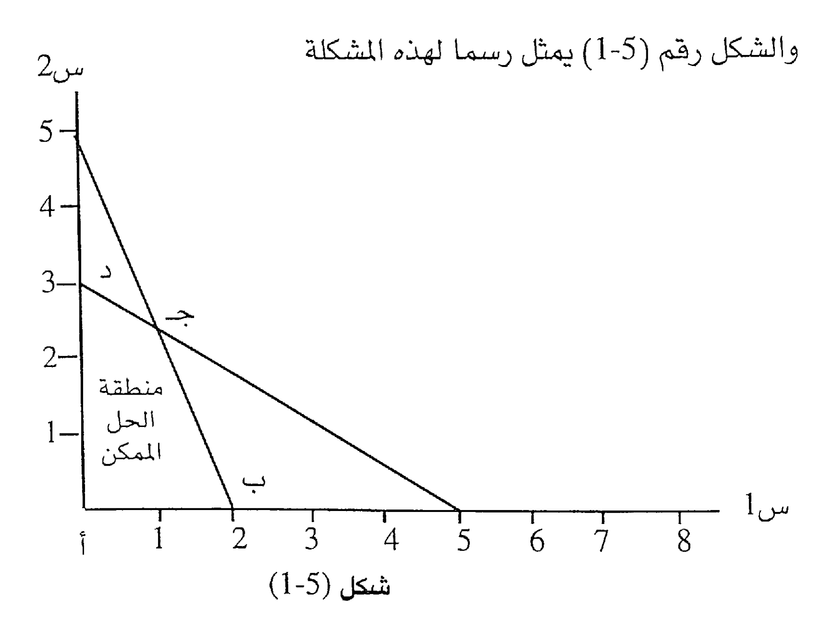
علما بأن:

3س1+ 5س2 ≥ 15

5س1+ 2 س2 ≥ 10

س1 و س2 > 0

والشكل رقم (5-1) يمثل رسما لهذه المشكلة



شكل (5-1)

وقد توصلنا للحل الأمثل لهذه المشكلة حيث كان:

س1 = $\frac{20}{19}$، س2 = $\frac{45}{19}$، ر = $\frac{235}{19}$

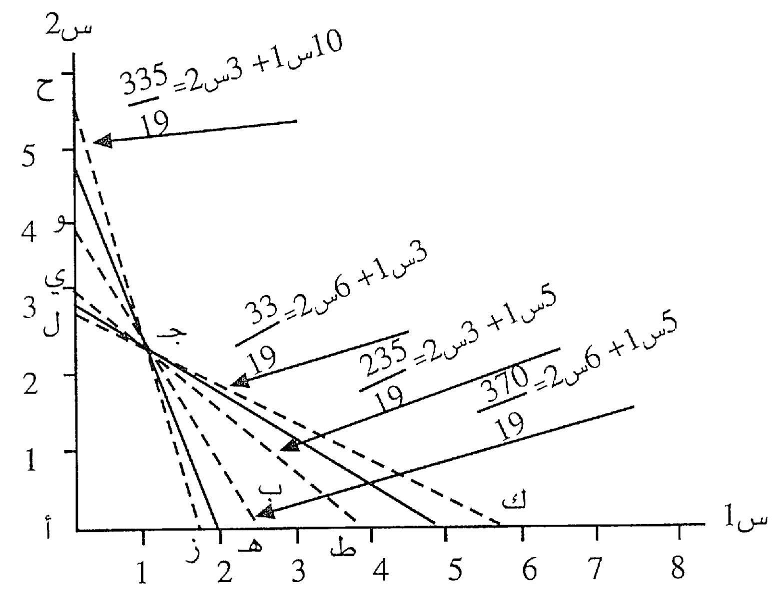
إفرض الآن أن تغيرا قد حدث للمعلومات القائمة عليها هذه المشكلة، وافترض أن التغيير قد حصل في المساهمة الحدية Changes in Contribution Rates وهي عبارة عن

الربح أو الكلفة التي تظهر في دالة الهدف، الآن نريد أن نجد مقدار تأثير هذا التغير على الحل الأمثل.

سنحاول إيجاد الإجابة لهذا السؤال بالطريقتين: طريقة الرسم والطريقة المبسطة.

أ- طريقة الرسم.

إذا كان هناك تغير في المساهمة الحدية، فإن منطقة الحل الممكن ستبقى كما هي، ولكن الذي يتغير هو ميل خط الربح أو الكلفة المتكافئ والشكل (5-2) يوضح ذلك وبافتراض التغيرات الآتية:



1- إن مساهمة العوامل هي 5، 3 أي أن

$$5س1+ 3س2= \frac{235}{19}$$

حيث

$$س1 = 2.47 \text{ ، } س2= 4.12$$

والخط هـ يمثل معادلة دالة الهدف هذه

2- إن مساهمة العوامل هي 10، 3 أي أن

$$10س 1+ 3س2= \frac{335}{19}$$

حيث

س1 = 1.8 ، س2 = 5.9

والخط ز ح يمثل المعادلة أعلاه.

3- إن مساهمة العوامل هي س1، س2 قد أصبحت 6،5 أي أن

5س 1+ 6س2 = $\frac{370}{19}$

حيث

س1 =3.9 س2 = 3.25

والخط ط ي يمثل هذه المعادلة.

4- إن مساهمة العوامل هي س1، وس2 قد أصبحت 3، 6 أي أن

3 س1+ 6 ، س2 = $\frac{33}{19}$

حيث

س1 =5.8، س2 = 2.89

والخط ك ل يمثل هذه المعادلة.

ب- الطريقة المبسطة:

تعتمد هذه الطريقة كما أشرنا سابقاً إلى استخدام الجدول الأخير أي جدول الحل الأمثل، سنستخدم أيضا مثالنا المتعلق بالشركة الوطنية لصناعة الأثاث حيث كان الجدول الأخيرلهذه المشكلة هو الجدول (5-1) الآتي:

جدول رقم (5-1)

الحل الأمثل لمشكلة الشركة الوطنية لصناعة الأثاث

مزيج الحل	رج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية
	↵	5	3	0	0	
س1	5	1	0	$\frac{2-}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
س2	3	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{3-}{19}$	$\frac{45}{19}$
ز ج		5	3	$\frac{5}{19}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{235}{19}$
رج – زج		0	0	$\frac{5-}{19}$	$\frac{16-}{19}$	

حيث يلاحظ من الجدول أن:

س1 = $\frac{20}{19}$

س1 = $\frac{45}{19}$

العوامل الأساسية

ح1= 0

ح2= 0

العوامل غير الأساسية

5-1-3 التغيرات في مساهمات العوامل في دالة الهدف:

سنقوم باستخدام الطريقة المبسطة للتعرف على درجة حساسية هذا الحل للتغيرات في مساهمات العوامل (معاملات العوامل في دالة الهدف) على خطوتين:

حيث نعالج في الخطوة الأولى التغير في معاملات العوامل غير الأساسية في دالة الهدف، بينما نعالج في الخطوة الثانية التغير في معاملات العوامل الأساسية في دالة الهدف.

أ- التغير في معاملات العوامل غير الأساسية في دالة الهدف:

نتطلع هنا للتعرف على درجة حساسية الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، للتغيرات التي تحدث في المساهمة الحدية للعوامل غير الأساسية، وبكلمة أخرى كم هو مقدار التغير في معاملات دالة الهدف (أي إلى أي حد يمكن أن تتغير هذه المعاملات) والذي يبقى مزيج الحل كما هو؟ وسيتم التحليل على مثالنا المتعلق بالشركة الوطنية للأثاث وذلك للتعرف على المدى الذي يمكن أن تتغير فيه مساهمات العوامل غير الأساسية (ح1 وح2) ودون أن تغير مزيج الحل الحالي، أي دون أن يدخل ح1 وح2 إلى مزيج الحل.

إن الإجابة على هذا السؤال تكمن في الصف الأخير (رج-زج) للجدول الأخير، ولما كانت مشكلتنا هي مشكلة تعظيم الأرباح، فإن الأساس المستخدم لن يتغير إلا إذا تغيرت قيمة أحد العوامل غير الأساسية لتصبح قيمة موجبة في الصف الأخير وهذا يعني أن الحل الأمثل سيبقى حلا أمثلا ما دامت الأرقام الظاهرة في الصف الأخير كلها مساوية أو أقل من الصفر (≤0).

وعلى هذا فإن القيم المتعلقة بـ ح1 أو ح2 والمقابلة إلى (رج) والتي سوف لا تؤدي إلى تغيير الحل الأمثل تحدد على أساس القاعدة الآتية:

رج-زج ≤0.

والتي يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

رج ≤ زج

ولما كانت قيمة ح1 والمقابلة إلى رج =0 دينار، وقيمته في الصف زج=19/5 دينار (انظر إلى الجدول رقم (5-1)) فإن الحل الحالي سيبقى حلاً أمثلاً ما دام الربح المتحقق من ح1 لا يزيد على 19/5 وبكلمة أخرى فإن المساهمة الحدية للساعة الواحدة من ساعات شعبة النجارة (ح1) يمكن زيادتها من (صفر - 19/5) دينار بدون تغيير لمزيج الحل الحالي، كذلك فإن المساهمة الحدية للساعة الواحدة لشعبة الإكمال (ح2) يمكن زيادتها من (صفر - 19/ 16) دينار وبدون تغيير مزيج الحل الحالي.

المدى الذي تبقى فيه المساهمات (رج) فعالة:

1- بالنسبة إلى (ح1):

- ∞≤ رج بالنسبة إلى ح1 ≤ 19/5

2–بالنسبة إلى (ح2):

– ∞≥ رج بالنسبة إلى ح2 ≥ 19/16

أي أنه بالإمكان زيادة القيم الموجودة في الصف رج لتصل إلى القيم الموجودة في الصف زج كما أنه يمكن إنقاص القيم المتعلقة بالعوامل غير الأساسية في الصف رج من صفر إلى ناقص ما لانهاية (–∞) دون أن يؤثر ذلك على دالة الهدف، والمهم أن التغير الحاصل في معاملات العوامل غير الأساسية في دالة الهدف، يؤثر على قيم العوامل التي تغيرات فقط وفي الصف الأخير (رج–زج).

ب- التغير في معاملات العوامل الأساسية في دالة الهدف:

إن التحليل الحسي المتعلق بالتغيرات في معاملات العوامل الأساسية في دالة الهدف، يعد أكثر صعوبة من التحليل الحسي المتعلق بالتغيرات في معاملات العوامل غير الأساسية وفي دالة الهدف أيضا.

لقد لاحظنا أن التغير في معاملات العوامل غير الأساسية في دالة الهدف يؤثر فقط على قيم هذه العوامل في الصف الأخير، فالتغير في مساهمة ح١ مثلا (عامل غير أساسي) يؤثر على قيمة ح١ فقط وفي الصف الأخير، أما التغير في الربح أو الكلفة للعوامل الأساسية فيمكن أن يؤثر على القيم الموجودة في الصف رج –زج ولكل العوامل غير الأساسية.

وفيما يأتي توضيح لذلك:

أ– افرض أن المساهمة الربحية للعامل الأساسي الأول س1 قد تغيرت من 5 دنانير إلى Δ+5، فما تأثير هذا التغير على الحل الأمثل الحالي؟ للإجابة على هذا السؤال سنقوم بإعادة بناء الجدول الأخير وذلك باستخدام المساهمة الجديدة إلى س1 وهي 5+ Δ، حيث أن الشكل الجديد لدالة الهدف هو:

ر = (5 + Δ) س1+ 3 س2

جدول رقم (5-2)

يبين أثر التغيرات التي وصلت في مساهمة س1

مزيج الحل	رج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية
		$5+\Delta$	3	0	0	
س1	$5+\Delta$	1	0	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
س2	3	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{45}{19}$
ز ج		$5+\Delta$	3	$\frac{5}{19} - \frac{2}{19}\Delta$	$\frac{16}{19} + \frac{5}{19}\Delta$	$\frac{235}{19} + \frac{20}{19}\Delta$
رج – زج		0	0	$\frac{-5}{19} + \frac{5}{19}\Delta$	$\frac{-16}{19} \quad \frac{-5}{19}$	

بناء على نتائج الجدول الجديد نستطيع القول بأن الحل الحالي سيتغير فقط إذا كان هناك واحد أو أكثر من القيم الموجودة في الصف الأخير قد أصبحت (>0) أي أكبر من صفر.

نلاحظ من الجدول الجديد أيضا ومن الصف الأخير بالذات أن قيمة (Δ) هي المؤثر على القيم الموجودة في الصف الأخير وتحت العوامل غير الأساسية، والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو: إلى أي حد يمكن أن تتغير قيمة Δ ودون تأثير على الحل الحالي؟ أو ما هو مقدار التغير في قيمة Δ والذي يبقي على الحل الحالي كحل مثالي للمشكلة؟

للإجابة على هذا لا بد من إيجاد قيمة Δ في كل عمود:

1– فيما يتعلق بالعمود ح1 من الصف الأخير ما يأتي:

$$0 \geq \Delta \frac{2}{19} + \frac{-5}{19}$$

أو

$$\frac{5}{19} \geq \Delta \frac{2}{19}$$

$$\frac{2}{19} \div \frac{5}{19} \geq \Delta$$

$$\frac{5}{2} \geq \Delta$$

هذا النتيجة تعني أن الحل الأمثل سيبقى كما هو ما لم يزداد الربح إلى س1 بأكثر من 2/5 بحيث تصبح ربحية الوحدة الواحدة من المنتج الأول مساوية إلى 7.5 دينار بدلا من 5 دنانير، هذا يتضمن أن الحل سيبقى هو الحل الأمثل طالما أن ربحية المنتج (س1) بقيت بحدود 7.5 دينار أو أقل (≥ 7.5)، أي أن ح1 لن يدخل إلا إذا تغيرت مساهمة س1 بأكثر من 7.5 دينار.

أ- أما بالنسبة إلى ح2:

من الصف الأخير لدينا ما يأتي:

$$0 \geq \Delta \frac{5}{19} - \frac{16}{19} -$$

$$\Delta \frac{5}{19} \geq \frac{16}{19}$$

أو

$$\Delta \geq \frac{16-}{5}$$

أي أن ح1 سوف لن يدخل الحل ما لم تنخفض ربحية المنتج الأول بأكثر من 5/16 دينار.

وبناء على ما تقدم فإن Δ تقع بين:

$$\frac{5}{2} \text{ و } \frac{16-}{5}$$

أو

$$\frac{5}{2} \geq \Delta \geq \frac{16-}{5}$$

وهذا يعني أن مدى التغير في ربحية س1 يمكن تمثيله بما يأتي

$\frac{5}{2}+5 \geq$ ر ج بالنسبة إلى س1 $\geq \frac{16}{5} - 5$

أو

1.8 ≥ رج بالنسبة إلى س1 ≥ 7.5

ب- بالنسبة إلى س2:

افرض أن مساهمة س2 قد تغيرت من 3 إلى 3 +Δ فإن دالة الهدف ستصبح:

ر =5 س1 + (3 + Δ) س2

ولتحديد مدى التغير الذي يمكن أن يحصل على ربحية المنتج الثاني (س2) (أي القيم التي ستأخذها (Δ) لا بد من إعادة بناء الجدول الأخير جدول (5-1) وذلك لإظهار هذه التغيرات وتحليل أثر هذه التغيرات على الحل الحالي، والجدول رقم (5-3) يبين هذه التغيرات.

جدول رقم (5-3)

يبين النتائج المصاحبة لتغير مساهمة س2

مزيج الحل	رج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية
		5	Δ+3	0	0	
س1	5	1	0	$\frac{2-}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
س2	Δ+3	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{3-}{19}$	$\frac{45}{19}$
ز ج		5	Δ+3	$\frac{\Delta 2}{19}+\frac{5}{19}$	$\frac{\Delta\ 3}{19}-\frac{16}{19}$	$\frac{\Delta 45}{19}+\frac{235}{19}$
رج – زج		0	0	$\Delta\ \frac{5-}{19}\ \frac{5-}{19}$	$\frac{3}{19}+\frac{16-}{19}$	

بعد بناء الجدول الجديد لا بد من استخدام النتائج المستحصلة (القيم في الصف الأخير) للإجابة على السؤال الآتي:

إلى أي مدى يمكن أن تتغير مساهمة س2 ودون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل؟

سنقوم بإجراء التحليل اللازم للإجابة على هذا السؤال، متبعين الخطوات اللازمة التي استخدمناها عند تحليل أثر التغير في مساهمة س1 على الحل الحالي.

1- بالنسبة إلى ح1:

من الصف الأخير للجدول (5-3) لدينا ما يأتي:

$$-\frac{5}{19} - \frac{5}{19}\Delta \le 0$$

$$-\frac{5}{19} \le \frac{5}{19}\Delta$$

أو

$$-1 \le \Delta$$

هذا يعني أن ح1 سوف لن يدخل الحل إلا إذا انخفضت ربحية س2 بأكثر من دينار.

2- بالنسبة إلى ح2:

$$-\frac{16}{19} + \frac{3}{19}\Delta \le 0$$

$$\frac{3}{19}\Delta \le \frac{16}{19}$$

أو

$$\Delta \le \frac{16}{3}$$

أي أن ح1 سوف يدخل إذا زادت مساهمة س2 بأكثر من 3/16 أو 5.333 دينار.

مما تقدم نلاحظ أن Δ بالنسبة إلى س2 تقع بين -1, 3/16

$$-1 \le \Delta \le \frac{16}{3}$$

وهذا يعني أن مدى التغير بالنسبة إلى س2 والذي لا يؤثر على الحل الأمثل الحالي يمكن تمثيله بما يأتي:

3-1 ≤ رج بالنسبة إلى س2 ≤ 3 + $\frac{16}{2}$

أو

2 ≤ رج بالنسبة إلى س2 ≤ 8.333

وبما أن 2.5 هي القيمة الموجب الوحيد ولا يوجد أصغر منها، فإننا نضيفها إلى دالة الهدف تمثل الحد الأعلى إلى ربح س1 وهو 7.5.

7 .5= 5+2.5

وكذلك نتيجة لعدم وجود قيمة سالبة أقل من−3.2 لكونها هي القيمة الوحيدة فإننا نأخذ قيمتها المطلقة ونطرحها من دالة الهدف س1 لتمثل الحد الأدنى وهو:

1.8 = 3.2 −5

وبذلك يكون الحد الأدنى 1.8 والحد الأعلى 7.5.

7.5 ≥ س1 ≥ 1.8

وإذا تجاوزنا هذه الحدود بالزيادة أو النقصان فإن الحل الأمثل الحل سوف يتغير وهذا يعني أن أحد المتغيرات غير الأساسية سوف يدخل الحل.

فلو افترضنا مثلاً أن ربحية الوحدة س1 هو 9 دنانير فإن الحل الجديد يصبح كما يلي:

		س1	س2	ح1	ح2	
	رج	9	3	0	5	الكمية
س1	9	9	0	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
س2	3	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{45}{19}$
ر ج		9	3	$\frac{-5}{19}$	$\frac{36}{19}$	$\frac{315}{19}$
رج - زج		0	0	$\frac{-3}{19}$	$\frac{-36}{19}$	

نلاحظ هنا أن هذا الحل قد تغير حيث أصبح معامل ح1 في الصف رج−زج= 19/3، ووجود هذه القيمة الموجبة يعني أن ح1 سوف تدخل الحل الجديد وتخرج بدلاً منها س2، ويمكن للقارئ أن يختبر بالنسبة للحد الأدنى حيث توضع أي قيمة أقل من 1.8 كدالة هدف إلى س1 وسوف يرى أن الحل قد تغير.

وهناك طريقة أخرى لإيجاد الحدود الدنيا والعليا لمعاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف، وتتلخص خطوات هذه الطريقة بما يلي:

1- نقسم الصف (رج-زج) من مصفوفة الحل الأمثل على الصف الممثل للمتغير الأساسي الداخل في الحل ويكون تركيزنا هنا على معاملات المتغيرات التي لم تدخل الحل النهائي.

2- نحدد أصغر قيمة موجبة ونضيفها إلى دالة الهدف الأساسية لتمثيل الحد الأعلى لدالة الهدف ذلك المتغير.

3- نحدد أكبر قيمة سالبة ثم نطرح قيمتها المطلقة من دالة الهدف الأساسية لتمثيل الحد الأدنى.

4- في حالة عدم وجود قيمة فإننا نعتبر أن القيمة الموجبة هي ما لانهاية (∞) وكذلك نفس الشيء بالنسبة للقيمة السالبة.

وفيما يلي تطبيق الخطوات على مثالنا السابق:

بالنسبة إلى س1

رج-زج	0	0	$\frac{5-}{19}$	$\frac{16-}{19}$
س1 =	1	0	$\frac{2-}{19}$	$\frac{5}{19}$

ونقوم هنا بقسمة القيم الواقعة تحت كل من ح1 وح2 فقط

$$\frac{\frac{5-}{19}}{\frac{2-}{19}} = 2.5 \qquad \frac{\frac{16-}{19}}{\frac{5}{19}} = 3.2-$$

بالنسبة إلى س2:

رج-زج	0	0	$\frac{5-}{19}$	$\frac{16-}{19}$
س2 =	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{3-}{19}$

$$\frac{\frac{-16}{19}}{\frac{5}{19}} = -3.2 \qquad\qquad \frac{\frac{-5}{19}}{\frac{-2}{19}} = 2.5$$

الحد الأعلى = 3 - 2 = 1   2 ≤ س2 ≤ 8.33

الحد الأعلى =3 + 5.33 = 8.33

وهذا يعني أن الحل يبقى مثاليا ما دامت دالة هدف س2 لم تتجاوز هذين الحدين بالزيادة أو النقصان.

ويمكن اختبار الحل بنفس الطريقة السابقة، هذا مع ضرورة مراعاة تغيير دالة الهدف لأحد المتغيرين في كل مرة نختبر بها الحل، فإذا غيرنا دالة الهدف س1 مثلاً، فيجب أن تبقى دالة س2 كما هي وكذلك العكس، وهذا يعني عدم تغيير معاملات دالة الهدف لكافة المتغيرات بنفس الوقت، وذلك لأن تغييرها معا يعني التغيير الكامل للحل وظهور حل جديد.

4-1-5 التغير في احتياجات العوامل Technological Coefficients

يعكس هذا التغير، التغير في التكنولوجيا فقد يستبدل المصنع الآلة القديمة بأخرى جديدة أو يعتمد على عاملين أكثر مهارة أو يغير في طريق وأساليب الإنتاج، أو في مواصفات المنتجات، إن التغير الحاصل في مثل هذه المجالات يؤثر دون شك على احتياجات المنتجات في الشعب الإنتاجية المختلفة فالتغير في احتياجات العوامل من المصادر اللازمة للإنتاج يؤدي إلى تغير في معاملات هذه العوامل في معادلات القيود، وإذا كان الأمر كذلك فلا بد من التعرف على أثر هذا التغير على الحل الأمثل الذي توصلنا إليه بافتراضات معينة سنقوم بمعالجة هذا الموضوع بواسطة طريقة الرسم فقط، ذلك أن معالجة هذا الموضوع عن طريق الطريقة المبسطة هو خارج إطار اهتمامنا في هذا الكتاب

لتوضيح أثر التغيرات في معاملات العوامل على الحل سنقوم باستخدام نفس المثال (مثال الشركة الوطنية لصناعة الأثاث).

نحن نعلم بأن صياغة مثالنا كان على الشكل الآتي:

تعظيم ر= 5 س1+ 3س2

علما بأن:

3س1+ 5 س2 ≤15

5س1+2 س2 ≤10

س1، س2≥0

افرض الآن ونتيجة التغير في الآلات أو في العاملين أن احتياجات المنتج الأول (س1) من شعبةالنجارة هي 2 ساعة بدلاً من 3 ساعات، و2 ساعة من شعبة الإكمال بدلاً من5 ساعات، افرض كذلك ولذات الأسباب أن احتياجات المنتج الثاني (س2) قد تغيرت بحيث أصبحت كالآتي:

3 ساعات في شعبة النجارة بدلا من 5 ساعات للوحدة الواحدة.

1.5 ساعة في شعبة الإكمال بدلا من 2 ساعة.

بحيث تصبح الصياغة كما يأتي:

تعظيم ر= 5 س1+ 3س2

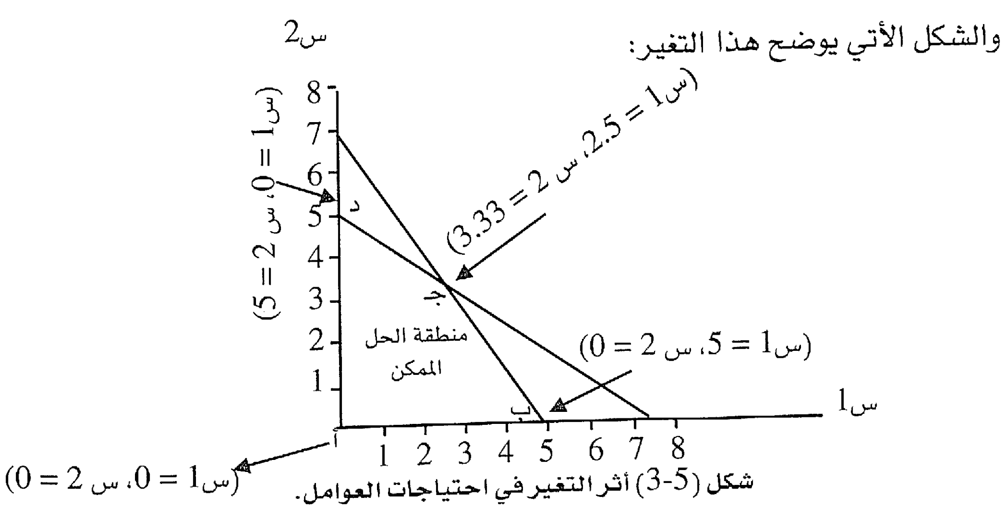
علما بأن:

2س1+ 3 س2 ≤15

2س1+ 1.5 س2 ≤10

س1، س2≥0

والشكل الأتي يوضح هذا التغير:



شكل (5-3) أثر التغير في احتياجات العوامل.

إن التغير في احتياجات العوامل يؤدي إلى تغير ملحوظ في شكل الحل الممكن وكذلك يؤثر على الربح أو الكلفة المصاحبة.

حيث نلاحظ من الشكل أعلاه أن هناك تغيرا في شكل الحل الممكن وقياسا بشكل الحل الممكن في الشكل رقم (5-1) أما الربح المتحقق فهو:

النقطة	الربح المتحقق
أ	0 = (0) 3 + (0) 5
ب	25 = (0) 3 + (5) 5
جـ	22.5 = (3.333) 3 + (2.5) 5
د	15 = (5) 3 + (0) 5

حيث يلاحظ من النتائج السابقة أن الربح قد تغير من 12.36 دينار إلى 25 دينار، وأن نقطة الحل الأمثل قد تغيرت من مقطة جـ إلى نقطة ب.

وتعني هذه الخطو إعادة الحل بالكامل، حيث أن معالجتها اعتماداً على الحل الأمثل هو أكثر تعقيداً من إعادة الحل.

5-1-5 التغيير في المصادر المتاحة:

قد يحصل تغير في المصادر المتاحة لمؤسسة ما في لحظة زمنية معينة، المهم بالنسبة لنا هو تحديد المدى الذي يمكن أن تتغير فيه هذه المصادر ودون أن يتغير الحل الأمثل الحالي، إن نقطة الارتكاز الأساسية في التحليل هنا هو أن قيمة العوامل الأساسية يجب أن تكون دائما (≤ 0)، أي أن لا يؤدي التغير في المصادر المتاحة إلى أن العوامل الأساسية تصبح قيماً سالبة في الحل الأمثل وسنقوم بتوضيح أثر التغيرات في المصادر المتاحة على الحل الأمثل بطريقة الرسم وبالطريقة المبسطة.

أ- التوضيح باستخدام طريقة الرسم:

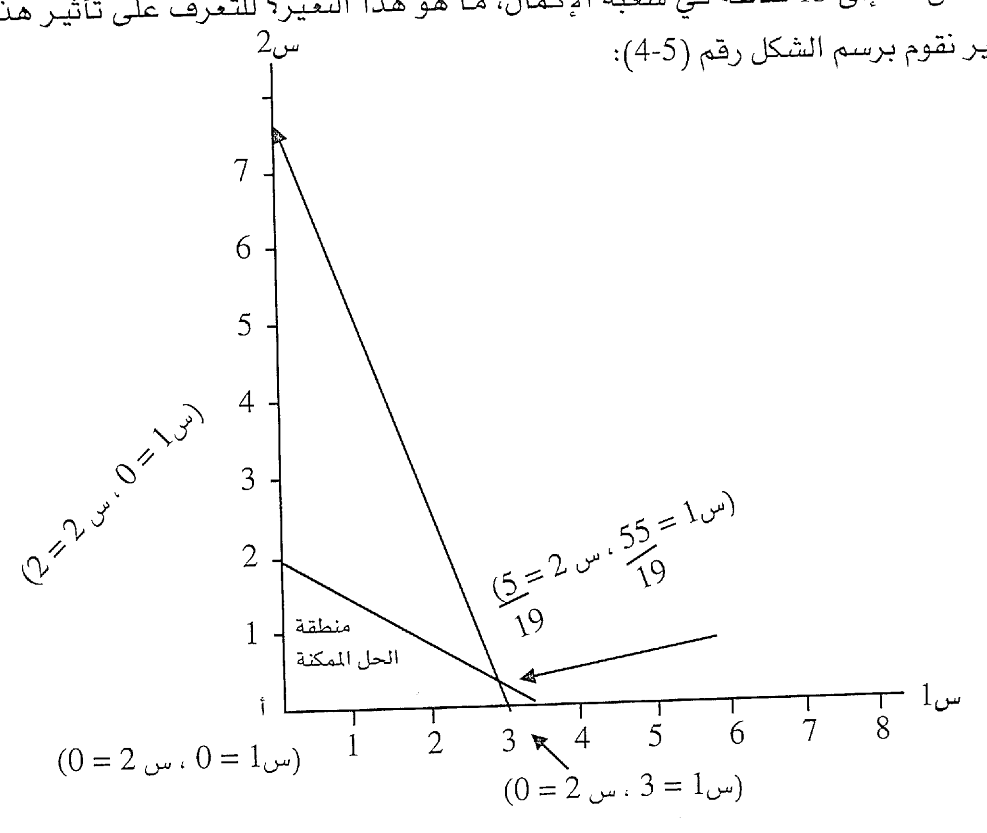
يودي التغير في المصادر المتاحة إلى تغير في منطقة الحل الممكن وكذلك في قيمة الحل الأمثل وكما يوضح المثال الآتي والمتعلق بالشركة الوطنية لصناعة الأثاث.

افرض أن المصادر المتاحة للشركة (عدد الساعات المتاحة في الشعب الإنتاجية) قد أصبحت كما يأتي:

3س1 + 5س2 ≥ 10

5س1 + 2س2 ≥ 15

أي أن المصادر المتاحة قد نقصت في شعبة النجارة من 15 إلى 10 ساعات، كما أنها زادت من 10 إلى 15 ساعة في شعبة الإكمال، ما هو هذا التغير؟ للتعرف على تأثير هذا التغير نقوم برسم الشكل رقم (5-4):



الشكل رقم (5-4): أثر التغييرات في المصادر المتاحة.

نلاحظ من الشكل أعلاه أن شكل منطقة الحل الممكن قد تغير مقارنة بشكل منطقة الحل الممكن قبل التغير (أنظر شكل رقم (5-1)) أما قيمة الحل الأمثل، فقد حددت على أساس تحديد قيمة الحل على كل من زاوية زوايا منطقة الحل الممكن وكما يأتي:

النقطة	معاملات س1 وس2	الربح المتحقق
أ	س1 = 0، س2 = 0	$5\ (0) + 3\ (0) = 0$
ب	س1 = 3، س2 = 0	$5\ (3) + 3\ (0) = 15$
جـ	س1 = $\frac{55}{19}$، س2 = $\frac{5}{19}$	$5\ \frac{(55)}{19} + 3\ \frac{(5)}{19} = \frac{290}{19}$
د	س1 = 0، س2 = 2	$5\ (0) + 3\ (2) = 6$

إن نقطة جـ هي نقطة الحل الأمثل حيث أن قيمة الحل الأمثل= 19/290 وهي أكبر من قيمة الحل الأمثل قبل التغيير والتي كانت = 19/235

ب- التوضيح باستخدام الطريقة المبسطة:

تعتمد هذه الطريقة في توضيح أثر التغير في المصادر المتاحة على الحل الأمثل الحالي، على استخدام جدول الحل الأمثل (جدول رقم (5-1)) ولتوضيح كيفية عمل هذه الطريقة دعنا نضع الافتراضات التالية:

1- إن المصادر المتاحة للقيد الأول (ساعات شعبة النجارة) قد تغيرت من 15 ساعة إلى $15 + \Delta$.

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هو إلى أي مدى يمكن أن نغير الكمية المتاحة (15 ساعة هنا) وبدون السماح لعوامل أخرى لتدخل الحل الأمثل؟

نستطيع الإجابة على هذا السؤال من خلال فحص الحل الأمثل المبين في الجدول رقم (5-1) حيث نستطيع من خلال التحليل للقيمة التي يمكن أن تأخذها Δ ع1 بدون تغيير لطبيعة الحل الأمثل.

لقد ذكرنا سابقا أنه من الضروري أن تكون قيمة العوامل الأساسية موجبة. وهذا يعني أن Δ لا يمكن أن تأخذ قيمة تؤدي إلى أن تأخذ العوامل الأساسية قيما سالبة في الحل الأمثل، وبناء على ذلك فإذا حدث وأن تغيرت الساعات المتاحة في الشعبة الأولى من 15 إلى $15+\Delta$ فإن كمية المصادر في الحل الأمثل ستصبح كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} \frac{20}{19} \\ \frac{45}{19} \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} \frac{-2}{19} \\ \frac{5}{19} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \frac{20}{19} - \frac{2}{19}\Delta \geq 0 \\ \frac{45}{19} + \frac{5}{19}\Delta \geq 0 \end{matrix}$$

{ إذ يجب أن تكون القيم موجبة للعوامل الأساسية وكما ذكرنا }

وكما نلاحظ نستطيع احتساب القيم الجديدة للعوامل الأساسية من خلال جمع القيم القديمة للعوامل الأساسية مع التغيرات التي حصلت في الكمية المتاحة Δ مضروبا ذلك بالمعاملات الموجودة في عمود ح1 في الجدول (5-1).

ولإيجاد القيم المناسبة إلى Δ سنقوم بتصميم الجدول الآتي:

العوامل	أصغر قيمة ل Δ والتي ستبقي العامل ≤ 0	أكبر قيمة ل Δ والتي ستبقي قيمة العامل ≤ 0
س1	∞−	10
س2	9−	∞

أي أننا نستطيع تغيير المصادر المتاحة (15 ساعة) ما بين:

15- 9 = 6 ، 15+ 10 = 25.

أي أن مدى التغير للساعات المتاحة هوما بين 6-25 بكلمة أخرى نستطيع تخفيض الساعات المتاحة في الشعبة الأولى من 15 إلى 6 ساعات وكذلك نستطيع زيادتها من 15 ساعة إلى 25 ساعة ودون تغيير لمزيج الحل الحالي.

2- افرض أن الكمية المتاحة والمتعلقة بالقيد الثاني قد تغيرت من 10 ساعات إلى 10+ Δ.

لا بد من تحديد القيمة التي يمكن أن تأخذها Δ ودون أن يؤثر ذلك على الحل الأمثل الحالي إذا حدث وأن تغيرت الكمية المتاحة من 10 ساعات إلى 10+ Δ فإن الكمية المتاحة في الحل الأمثل ستصبح كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} \frac{20}{19} \\ \\ \frac{45}{19} \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} \frac{5}{19} \\ \\ \frac{3}{19} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \frac{20}{19} + \frac{5}{19}\Delta \geq 0 \\ \\ \frac{45}{19} - \frac{3}{19}\Delta \geq 0 \end{matrix}$$

{ قيم العوامل الأساسية يجب أن تكون موجبة }

ولإيجاد القيم المناسبة ل Δ نقوم بحل المعادلات أعلاه أو بتصميم الجدول الآتي:

العوامل	أصغر قيمة ل Δ والتي ستبقي قيمة العامل ≤ 0 صفر	أكبر قيمة ل Δ والتي ستبقي قيمة العامل ≤ 0 صفر
س1	4	∞
س2	∞ −	15

أي أننا نستطيع تغيير الكمية الأصلية (10) ما بين:

10- 4 = 6 ، 10+ 15 = 25

أي أن مدى التغير للساعات المتاحة هو ما بين 6 و 25 بعبارة أخرى نستطيع تخفيض الساعات المتاحة في الشعبة الثانية من 10 ساعات إلى 6 ساعات، كما أننا نستطيع زيادتها من 10 ساعات إلى 25 ساعة ودون تغيير لمزيج الحل الحالي.

وهناك طريقة أخرى لمعالجة هذه الحالة وتتلخص خطواتها بما يلي:

1- قسمة عمود الكميات في الحل النهائي على معاملات العوامل الحرة أو غير الأساسية المقابلة لها، فمثلا إذا أردنا إيجاد حدود الكميات للقيد الأول فإننا نقسم عمود الكميات على معاملات ح1، وبالنسبة للقيد الثاني نقسم الكميات على معاملات ح2 وهكذا.

2- تؤخذ أقل قيمة موجبة ونطرح منها الكمية الأساسية للحصول على الحد الأدنى لكمية القيد.

3- تؤخذ القيمة المطلقة لأكبر قيمة سالبة وتضاف إلى الكمية الأساسية للحصول على الحد الأعلى للكمية.

4- في حالة عدم الحصول على نتائج من إشارة معينة فإننا نأخذ ما لا نهاية تلك الإشارة سواء بالسالب أو الموجب.

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على مثالنا:

القيد

الكميات		ح1	
$\frac{20}{19}$	÷	$\frac{-2}{19}$	= -10
$\frac{45}{19}$	÷	$\frac{5}{19}$	= 9

الحد الأدنى= 15 - 9 = 6 Δ = -9

الحد الأعلى= 15 +10 = 25 Δ = 10

وهذا يعني أن الحل يبقى مثالياً ما دامت كمية القيد الأول واقعة ضمن هذه الحدود.

ومن أجل الاختبار نحدد قيمة Δ ونضربها في معاملات العامل الحر المتعلق بالمتغير قيد البحث ثم نضيف النتائج إلى الكميات الأساسية.

لو أخذنا الحد الأعلى وهو 25

الكميات		Δ		ح1	
$\frac{20}{19}$	+	10	x	$\frac{-2}{19}$	= 0
$\frac{45}{19}$	+	10	x	$\frac{5}{19}$	= $\frac{95}{19}$ = 5

نلاحظ هنا أن كمية القيد الأول أصبحت صفراً، وهذا يعني أن أي تجاوز للحد الأعلى سوف ينقل الكمية إلى السالب وهذا لا يجوز وفقاً لافتراضات وأسس البرمجة الخطية.

فمثلا لو افترضنا أننا رفعنا كمية القيد الأول لتصبح 30، فهذا يعني أن Δ=15.

الكميات		Δ		ح1	
$\frac{20}{19}$	+	15	x	$\frac{-2}{19}$	= $\frac{-10}{19}$
$\frac{45}{19}$	+	15	x	$\frac{5}{19}$	= $\frac{120}{19}$

لقد تغيرت إشارة الكمية الأولى إلى السالب كما نلاحظ والسبب في ذلك يعود إلى تجاوزنا للحد الأعلى للقيد الأول وهو 25.

ويمكن اختبار الحد الأدنى باتباع نفس الأسلوب.

القيد الثاني

الكميات		ح2	
$\frac{20}{19}$	÷	$\frac{5}{19}$	= 4
$\frac{45}{19}$	÷	$\frac{-3}{19}$	= -15

الحد الأدنى= 10 - 4 = 6

الحد الأعلى= 10 +15 = 25

اختبار الحد الأعلى:

الكميات Δ ح2

$$\frac{20}{19} + \left(15 \times \frac{5}{19}\right) = \frac{95}{19}$$

$$\frac{45}{19} + \left(15 \times \frac{-3}{19}\right) = 0$$

اختبار الحد الأدنى:

الكميات Δ ح2

$$\frac{20}{19} + \left(-4 \times \frac{5}{19}\right) = 0$$

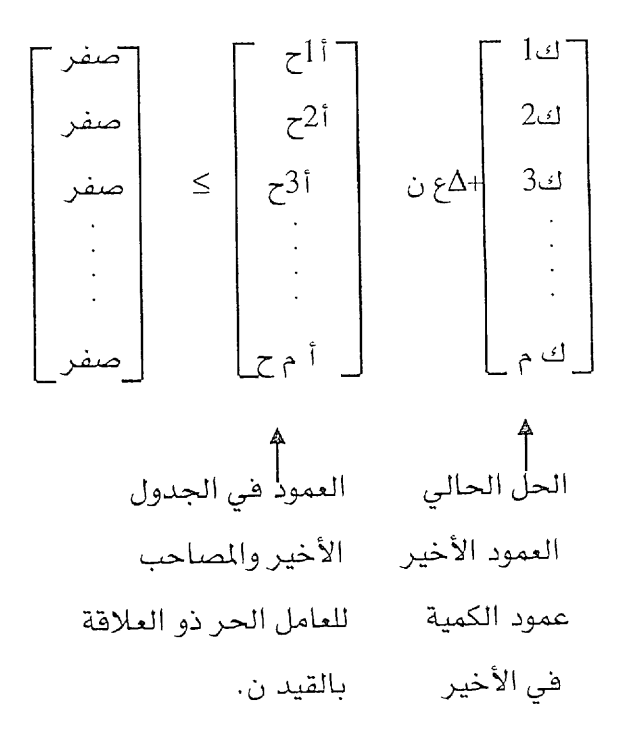
$$\frac{45}{19} + \left(-4 \times \frac{-3}{19}\right) = \frac{57}{19}$$

وإذا تجاوزنا هذه الحدود إلى الأسفل أو الأعلى فسوف يتغير الحل كما أوضحنا سابقاً.

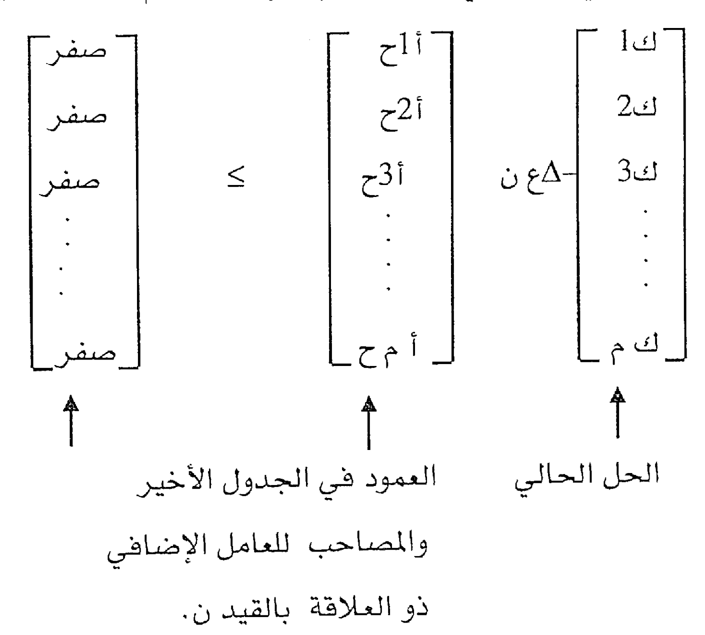
مفهوم أساسي:

إذا حدث وأن أضيفت كمية جديدة Δ للمصادر المتاحة وللقيد أ في مشكلة برمجة خطية، فإن أجزاء الطرف الأيسر (عمود الكمية) للحل الأمثل ستتكون من الكمية المتاحة أصلاً +Δ مضروبا ذلك في المعاملات ذات العلاقة بالعامل الحر المتعلق بالقيد أ، وذلك في الحل الأمثل الأصلي.

لقد قمنا بالتعرف على أثر الزيادة في المصادر المتاحة على الحل الأمثل الحالي والمتعلق بمثالنا على الشركة الوطنية للأثاث، أما المدخل العام للتعريف على أثر التغير في المصادر المتاحة على الحل الأمثل فيمكن التعرف عليه من خلال استخدام المعادلة الآتية:

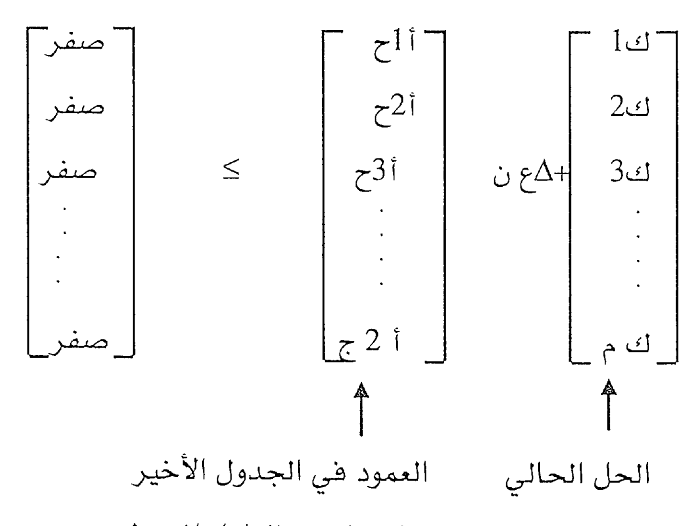


هنا لا بد من ملاحظة أن الإجراء السابق يستخدم فقط لتحليل أثر التغير في المصادر المتاحة في حالة كون العلاقة بين طرفي القيد هي على شكل (≥ 0) أما إذا كانت العلاقة بين طرفي القيد هي على شكل (≤ 0) فنستخدم المعادلة الآتية:



حيث نلاحظ أن الإجراء وبشكل عام لا يختلف عن السابق إلا فيما يتعلق بالعمود المصاحب للعامل الإضافي، حيث يلعب هذا العمود دوراً مركزياً بدلاً من عمود العامل الحر في حالة كون العلاقة (≥).

أما إذا كانت العلاقة بين طرفي القيد هي علاقة مساواة ولاحتساب المدى الذي تتغير فيه كمية المصادر المتاحة ودون تغيير المزيج الحل الحالي، فإننا نستخدم العمود المصاحب للعامل المصطنع والمتعلق بالقيد موضوع البحث، وأن المعادلة الآتية تستخدم لتحديد ذلك المدى:



إضافة قيد جديد Adding New Constraint

لو كان لدينا المثال التالي:

عظم ر= 3س1+5 س2

علما بأن:

س1 ≤ 4

2س2 ≤ 12

3س1 + 2س2 ≤ 18

س1، س2 ≥0

فإن مصفوفة الحل النهائي لهذا المثال تكون كما هو موضح في الجدول التالي:

مزيج الحل	رج	س1	س2	ح1	ح2	ح3	الكمية
	↓	3	5	0	0	0	
ح1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1-}{3}$	2
س2	5	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
س1	3	1	0	0	$\frac{1-}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
رج		3	5	0	1.5	1	36
رج - زج		0	0	0	1.5-	1-	

لو افترضنا أننا كنا نرغب بإدخال إضافات على المنتجين س1 وس2 المذكورين في مثالنا، وأن هذه الإضافات تتطلب مرور كل من المنتجين في مرحلة رابعة وفقاً للقيد التالي:

4س1 + 3س2 ≤ 30

وبناء على ذلك تصبح المسألة:

عظم ر= 3س1+5 س2

علما بأن:

س1 ≤ 4

2س2 ≤ 12

3س1 + 2س 2 ≤ 18

4س1+ 3س2 ≤30

وبعد تحويل المتباينات إلى معادلات ووضعها بشكل نهائي تمهيداً لحلها باستخدام الطريقة المبسطة فإنها تصبح كما يلي:

3 س1 + 5 س2 + ح1 + ح2 + ح3 + ح4

علماً بأن

س1 + 0 س2 + 0ح1 + 0ح2 + 0ح3 + 0ح4 =4

0س1 + 2 س2 + 0ح1 + 0ح2 + 0ح3 + 0ح4 =12

3س1 + 2 س2 + 0ح1 + 0ح2 + 0ح3 + 0ح4 =18

4س1 + 3 س2 + 0ح1 + 0ح2 + 0ح3 + 0ح4 =30

وعلى افتراض أننا وبهدف اختصار الوقت لا نريد حل المسألة بالكامل وإنما نفضل الاستعانة بأحد المتخصصين في مجال بحوث العمليات لتزويدنا بالنتيجة النهائية بالسرعة الممكنة فكيف يمكن لهذا الشخص أن يقوم بهذه المهمة؟

والجواب على هذا السؤال يتلخص بالخطوات التالية:

1- الرجوع إلى جدول الحل الأمثل قبل إضافة القيد الجديد وتحديد المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل، وهي هنا س1 وس2، وهذا يعني أن المتغيرين قد دخلا إلى الحل على مرحلتين أو خطوتين.

2- لو افترضنا أو تخيلنا بأن هذا القيد الجديد كان موجوداً منذ البداية لكان معامله في العمود س1 عند دخله الحل=4 وفي س2=3.

3- تطبيقاً للقاعدة المتعلقة بكيفية إيجاد قيم المتغيرات الأخرى عند دخول أحدهما في الحل فإننا نقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرين س1 وس2 على القيد الجديد (ح4) معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد.

ح4 (القديم)		س1		س2		ح4 (النهائي)
4	-	[(4)(1)	+	(3)(0)]	=	0
3	-	[(4)(0)	+	(3)(1)]	=	0
0	-	[(4)(0)	+	(3)(0)]	=	0
0	-	[(4)($\frac{-1}{3}$)	+	(3)($\frac{1}{2}$)]	=	$\frac{-1}{6}$

$$0 - \frac{[(0)(3) + (1)(4)]}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$1 - [(0)(3) + (0)(4)] = 1$$

$$30 - [(6)(3) + (2)(4)] = 4$$

بعد ذلك نضيف هذه النتائج إلى جدول الحل النهائي حيث نحصل على صف إضافي وهو ح4.

متغيرات	س 1	س2	ح1	ح2	ح3	ح4	كميات
ح1							2
س1							2
س2							6
ح4	0	0	0	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-4}{3}$	1	4

وإذا حدث وحصلنا على كمية سالبة بعد إدخال هذا القيد الجديد، كما لو كان 4س1+3س2 ≥ 20 مثلا، فإننا نستعين بمبادئ نظرية الحل المقابل وبنفس الأسلوب الذي شرحناه سابقا من أجل الوصول إلى الحل الجديد.

إضافة متغير جديد Adding a New Variable؛

عند إضافة متغير جديد لمسألة البرمجة الخطية لأي سبب، فإنن نعيد حل المسألة بالكامل أو نعتمد على نتيجة الحل النهائي إذا كانت متوفرة، وتتم هذه العملية عن طريق ضرب عمود قيم المتغير الجديد في مصفوفة معاملات المتغيرات غير الأساسية الممثلة للقيود، ومن ثم نحسب الناتج في الصف رج-زج والذي يكون سالبا أو موجبا. فإذا كان سالبا فيعني ذلك أن الحل لا يتغير أما إذا كان موجبا فيعني أن الحل الأمثل لم يعد كذلك، ومن أجل إيجاد الحل الأمثل نستمر في الحل وفق الخطوات التي سبقت الإشارة إليها.

فمثلاً لو أضفنا المتغير س3 للمثال السابق بدالة هدف 4 ومعاملات في القيود الثلاثة على التوالي (2، 1، 3) فإن حساب قيم عمود س3 تتم كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 3/4 \\ 2/1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/1- & 3/1 & 1 \\ 0 & 2/1 & 0 \\ 3/1 & 3/1- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وبعد إدخال هذه النتيجة على جدول الحل الأمثل يصبح كما يلي:

مزيج الحل	رج	س1	س2	س3	ح1	ح2	ح3	الكمية
		3	5	4	0	0	0	
ح1	0	0	0	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1-}{3}$	2
س2	5	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	6
س1	3	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1-}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
زج		3	5	4.5	0	1.5	1	36
رج - زج		0	0	0.5-	0	1.5-	1-	

نلاحظ هنا بأن معامل المتغير الجديد في الصف رج-زج هو -0.5 ويعني ذلك أن الأمثل لا يتغير.

2-5 الحل الثنائي أو المقابل The Dual Solution

1-2-5 مقدمة وتوضيح لمفهوم أسعار الظل:

قبل البدء في توضيح مفهوم الحل الثنائي فإنه لا بد من إلقاء الضوء على أحد أهم المفاهيم الأساسية التي تعتمد عليها طريقة الحل الثنائي أو المقابل في مشاكل البرمجة الخطية وهذا المفهوم هو أسعار الظل Shadow Prices

يمكن تعريف سعر الظل بأنه عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص في دالة الهدف والناجم عن زيادة أو نقص الكمية المتاحة، كذلك يمكن القول بأن سعر الظل هو عبارة عن الربح الإجمالي الناتج عن إضافة وحدة جديدة من المواد النادرة وأخيراً يمكن التعبير عن سعر الظل بأنه عبارة عن المبلغ الذي ترغب المنشأة دفعه للحصول على الموارد الإضافية

حيث أنها لا يمكن أن تحقق ربحاً أكثر من هذا المبلغ إذا زادت أيا من الكميات بمقدار وحدة واحدة، فعلى سبيل المثال هل إضافة ساعة واحدة لساعات شعبة النجارة، يستحق ديناراً واحداً، خمسة دنانير أو عشرة دنانير؟ هل هناك تبرير اقتصادي لدفع أجور إضافية للعمال الذين يحصلون على ساعة إضافية؟

إن الحصول على معلومات للإجابة على مثل هذه الأسئلة يعتبر أمراً مهماً وحيوياً للإدارة.

يمكن الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من الصف الأخير (صف رج-زج) وللجدول الأخير، مرة أخرى دعنا نعود لمثالنا المتعلق بالشركة الوطنية لصناعة الأثاث، والتي كنا قد توصلنا للحل الأمثل لمشكلتها.

الجدول رقم (5-2:1) يبين لنا هذا الحل:

جدول رقم (5-2:1)

مزيج الحل	رج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية
		5	3	0	0	
س1	5	1	0	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
س2	3	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{45}{19}$
زج		5	3	$\frac{5}{19}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{235}{19}$
رج - زج		0	0	$\frac{-5}{19}$	$\frac{-16}{19}$	

نحن نعلم أنه إذا كانت القيم الموجودة في الصف رج-زج كلها مساوية أو أصغر من صفر (≤ 0)، فهذا يعني أننا لا نستطيع تحسين الحل أكثر من ذلك ، أي لا نستطيع زيادة قيمة دالة الهدف وهذا يعني أننا وصلنا للحل الأمثل.

نريد الآن أن نعرف كيف يمكن استخدام القيم الموجبة في الصف رج-زج، لتحديد قيمة

الموارد الإضافية بالنسبة لمثالنا لدينا القيم الآتية للعوامل الحرة وكما يظهرها الجدول رقم (5-2 :2).

جدول رقم (5-2:2)

قيد المصدر Resource	العامل الحر المصاحب Associated Slack Variable	قيمة الصف رج-زج المثلى Value of Ci-Zi at Optimum
شعبة النجارة	ح1	$\frac{5-}{19}$
شعبة الإكمال	ح2	$\frac{16-}{19}$

إن الخاصية الهامة والمتعلقة بالصف الأخير هي أن سالب قيم العوامل الحرة، المصاحبة للقيود في الصف الأخير تنبؤنا عن الزيادة في دالة الهدف والتي يمكن أن تحصل نتيجة زيادة الكمية المتاحة من المصدر الذي يصاحبه العامل الحر المذكور بوحدة إضافية واحدة.

وباستخدام هذه الخاصية نستطيع أن نستنتج أن الوحدة الإضافية المتعلقة بمصادر الشركة الوطنية للأثاث، لها القيم الآتية:

المصدر	قيمة الساعة الإضافية
شعبة النجارة	$\frac{5}{19}$
شعبة الإكمال	$\frac{16}{19}$

هذا يعني أن زيادة ساعة واحدة في شعبة النجارة سيؤدي إلى زيادة الأرباح بمقدار 19/ 5 دينار، وكذلك فإن زيادة ساعة واحدة في شعبة الإكمال سيؤدي إلى زيادة الربح بمقدار19/16 دينار.

وبكلمة أخرى، فإن هذا يعني أن الشركة الوطنية لصناعة الأثاث يمكنها أن تدفع كثمن للحصول على ساعة إضافية للشعبة الأولى وكذلك للشعبة الثانية ما لا يزيد عن 19/5 و19/16 دينار على التوالي.

ويمكن تفسير سعر الظل في قسم النجارة (19/5) بدراسة العمود ح1 في الجدول رقم (5-2 :1)، حيث يتضح منه أن زيادة الطاقة الإنتاجية المتاحة في قسم النجارة بمقدار ساعة يترتب عليها نقصان في الكمية المنتجة من س1 بمقدار 19/2 وحدة، وزيادة الكمية المنتجة من س2 بمقدار 19/5 وحدة، ويمكن توضيح أثر ذلك على الربح كما يأتي:

$$\frac{5}{19} = \frac{5}{19} \times 3 + \frac{2-}{19} \times 5$$

وتعادل هذه الزيادة سعر الظل للساعة الواحدة في قسم النجارة، وكذلك يمكن تفسير سعر الظل في شعبة الإنهاء وقدره 19/16 من خلال دراسة العمود تحت العامل ح2 وفي نفس الجدول السابق.

يتضح من هذا العمود أن زيادة الطاقة المتاحة في قسم الإكمال بساعة واحدة يترتب عليه زيادة الكمية المنتجة من س1 بمقدار 19/5 وحدة وإنقاص الكمية المنتجة من س2 بمقدار 19/3 وحدة، وهذا يؤدي إلى النتائج الآتية:

$$\frac{16}{19} = \frac{3}{19} \times 3 - \frac{5}{19} \times 5$$

حيث تعادل هذه الزيادة سعر الظل للساعة في قسم الإنهاء.

وباختصار، فإن هذا يعني أن بالإمكان دفع ما يعادل 19/5 دينار كثمن لساعة إضافية واحدة من ساعات الشعبة الأولى، و19/16 دينار كثمن لساعة إضافية واحدة في الشعبة الثانية.

المدى المقابل لسعر الظل Range Over Which Shadow Price Remain Valid

من الواضح أننا لا نستطيع إضافة كمية لا محدودة من المصادر وبدون مخالفة لقيود المشكلة وعلى هذا الأساس وبعد تحدبد سعر الظل، لا بد من تحديد عدد الساعات الممكن إضافته علمياً لزيادة أرباحنا أي هل نستطيع إضافة ساعة واحدة، ساعتين، أم 200 ساعة؟، إن الإجابة على هذا التساؤل تستدعي تحديد المدى الذي يبقى عنده سعر الظل مفيداً وفعالاً، ويمكن تحديد المدى الفعال والمقبول من خلال تتبع الخطوات الآتية:

إيجاد النسبة لكل عامل حر وذلك من خلال تقسيم الكمية الثابتة على الأرقام الواردة في أعمدة العوامل الحرة موضوع البحث وفي الجدول الأخير.

أ- فيما يتعلق بالعامل الحر الأول ح1

من الجدول رقم (6-1) لدينا المعلومات الآتية:

1	2	3
ح1	الكمية (ك)	النسبة = 2 ÷ 1
$\frac{-2}{19}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{20}{19} \div \frac{-2}{19} = -10$
$\frac{5}{19}$	$\frac{-45}{19}$	$\frac{45}{19} \div \frac{5}{19} = 9$

إن الرقم السالب (-10) يخبرنا بعدد الساعات الذي يمكن إضافته إلى أوقات شعبة النجارة وبدون تغير لمزيج الحل، كذلك فإن الرقم الموجب (9) يخبرنا بعدد الساعات الذي يمكن إنقاصه من وقت شعبة الإكمال وبدون تغيير لمزيج الحل الحالي، أي أن المدى بالنسبة إلى ح1 هو 6-25 أي

15 - 9 = 6 و 15 + 10 = 25

ب- وفيما يتعلق في ح2:

1	2	3
ح1	الكمية (ك)	النسبة = 2 ÷ 1
$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{20}{19} \div \frac{5}{19} = 4$
$\frac{-3}{19}$	$\frac{45}{19}$	$\frac{45}{19} \div \frac{-3}{19} = -15$

حيث أن الرقم (4) يعني أننا نستطيع إنقاص وقت شعبة الإكمال بأربع ساعات ودون تغيير لمزيج الحل (10- 4 =6)، وأن الرقم (-15) يعني أننا نستطيع إضافة 15 ساعة إلى شعبة الإكمال وبدون تغيير لمزيج الحل (10+ 15= 25) أي أن المدى بالنسبة لـ ح2 هو 6-25.

ونلاحظ هنا أننا قمنا بتطبيق الخطوات التي سبق شرحها عند تحديد الكميات في الجزء السابق من هذا الفصل.

وإضافة إلى ما سبق لو قمنا بضرب أسعار الظل في أي من مصفوفات الحل بالكميات الأساسية فإننا نحصل على قيمة دالة الهدف، فلو أخذنا القيمة المطلقة لأسعار الظل الظاهرة في الصف رج–زج في مصفوفة الحل الأمثل وهي (19/5، 19/16) وضربناها في الكميات الأساسية للقيدين وهي (10،15) على التوالي فإن الناتج هو 19/235 وهذه الكمية للربح الإجمالي.

$$\frac{235}{19} = \frac{(16)}{19}\,10 + \frac{(5)}{19}\,15$$

ويمكن استخدام هذه الطريقة للتأكد من صحة الحل في مراحله المختلفة.

2-5 -2 الحل أو النموذج الثاني لمشكلة البرمجة الخطية: تعظيم الأرباح

The Dual Linear Programming

كل مشكلة برمجة خطية لها مشكلة برمجة خطية ثانية مصاحبة لها، والتي تسمى بالمشكلة الثانية أو الحل الثاني The Dual الطريقة الأولى التي توضح فيها مشكلة البرمجة الخطية تسمى المشكلة الأولية The Primal Problem والطريقة الثانية لوضع نفس المشكلة تسمى بالطريقة الثانية أو الحل الثاني The Dual والحل الأمثل لكليهما واحد.

يحتوي الحل الثاني على معلومات اقتصادية للإدارة ويمكن إيجاده بشكل أسهل وأسرع من المشكلة الأولية، حيث أن الخطوات أو عدد مرات الإعادة تكون أقل من تلك اللازمة لحل المسألة الرئيسية أو الأولية وذلك كما يتضح فيما بعد وبشكل عام وعندما يكون عدد المتغيرات أقل من عدد القيود فإنه من المفيد حل المسألة على أساس الحل الثاني[1].

إن صياغة المشكلة الثانية على أساس المشكلة الأولية أو الأساسية لا يعتبر أمراً صعباً وحال صياغة المشكلة فإن إجراءات الحل هي نفسها في حالة مشكلة برمجة خطية وبشكل عام إذا كانت المشكلة الأولية أو الرئيسية تتطلع أو تهدف إلى تعظيم الربح ومقيدة بقيود ذات علاقة (≥)، فإن الثانية ستتطلع أو تهدف إلى تقليل كلفة الفرصة المضاعفة ومقيدة بقيود ذات علاقة (≤).

1-Eck, Roge, D. Operations Research for Business, Wadsworth Publishing Company, Inc. 1976, 0 209.

وعلى سبيل المثال إذا كانت المشكلة الأولية تهدف إلى تعظيم الربح الناجم عن إنتاج وبيع المنتجين في مثالنا السابق، فإن الحل الثاني سيهتم بتقييم الوقت اللازم لإنتاج هذين المنتجين، وذلك في شعبتي النجارة والإكمال، إن الخاصية الأساسية للعلاقة بين المشكلة الأولية (الأساسية) والمشكلة الثانية هي أن الحل لأي منهما يعطي الحل للأخرى، وفي الحالات التي يوجد فيها فرق بين المشكلة الأولية والمشكلة الثانية وذلك فيما يتعلق بصعوبة العمليات الحسابية Computation Difficulties فإنه يمكن اختيار الأسهل من بينهما.

القواعد المستخدمة لصياغة المشكلة الثانية لمشكلة تعظيم الأرباح ذات العلاقة المقبولة:

Rules for Formulating The Dual of a Maximization Problem in Canonical Form.

لتوضيح كيفية صياغة مشكلة برمجة خطية ذات علاقات مقبولة وعلى أساس الحل الثاني، دعنا نعود للمثال السابق والمتعلق بالشركة الوطنية لصناعة الأثاث، أن الصياغة الأولية لهذه المشكلة وكما نعلم كانت كما يأتي:

تعظيم ر= 5س1+3 س2

علما بأن:

3س1 + 5س2 ≥ 15

5س1 + 2س2 ≥ 10

س1، س2 ≤0

حيث نلاحظ أن القيود على هذه المشكلة هي ذات علاقة (≥) إضافة إلى قيد اللاسلبية ومشكلة من هذا النوع يمكن القول بأنها بالشكل المقبول (Canonical Form)، ولصياغة مشكلة تعظيم الأرباح وكمشكلتنا هذه على أساس الحل الثاني فإن الأمر سهل نسبياً.

دعنا نضع الصياغة الثانية لهذه المشكلة ثم نتعرف بعد ذلك على القواعد أو الخطوات التي اعتمدت لتحويل المشكلة من أولية إلى ثانية:

تقليل ر = 15 ص1 + 10 ص2

علماً بأن:

3 ص1 + 5 ص2 ≤ 5

5 ص1 + 2 ص2 ≤ 3

ص1 ، ص2 ≤ 0

من الصياغة أعلاه يمكن وضع القواعد الآتية:

1- أن المشكلة الثانية هي مشكلة تقليل كلفة.

2- أن قيود المشكلة الثانية كلها مساوية أو أكبر (≤).

3- عندما يكون عدد المتغيرات في المشكلة الأولية يساوي ن (في مثالنا ن=2) فإن عدد قيود المشكلةالثانية = ن.

4- عندما يكون عدد المتغيرات في المشكلة الأولية يساوي م (في مثالنا م=2) فإن عدد قيود المشكلة الثانية = م.

5- أن القيم الموجودة على يسار الجدول (تحت عمود الكمية) وللمشكلة الأولى والمتعلقة بالمصادر المتاحة (القيود) تصبح عوامل المتغيرات في دالة الهدف بالنسبة للمشكلة الثانية.

6- تصبح عوامل المتغيرات في دالة الهدف وبالنسبة للمشكلة الأولى قيم القيود (الكمية الثانية) على يسار الجدول بالنسبة للمشكلة الثانية.

7- تغيير الصف في المشكلة الأولية إلى عمود في المشكلة الثانية والعمود إلى صف Trans-pose، أي نقل أو تغيير معاملات المتغيرات في القيود بالنسبة للمشكلة الأولية من جانب إلى جانب بحيث تصبح هذه المعاملات المغيّرة معاملات المتغيرات في المشكلة الثانية.

8- أن قيد اللاسلبية موجود في المشكلتين.

9- الحل الثاني هو الحل الأول، The Dual of The Dual is the Primal.

بما أننا قمنا بصياغة مشكلتنا على أساس الحل الثنائي دعنا نستمر الآن في حلها وذلك بعد طرح العوامل الإضافية وإضافة العوامل المصطنعة وكما يأتي:

تقليل ر = 15 ص1 + 10 ص2 + (0) ح1 + (0) ح2+ م أ1+ م أ2

علماً بأن:

3 ص1 + 5 ص2 – ح1 + أ1 = 5

5 ص1 + 2 ص2 −ح2 + أ2 =3

ص1 ، ص2 ح1، ح2، أ1 ، أ2 ≥ 0

جدول (5-2 :3)

مزيج الحل	ر ج	ص1	ص2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية	النسبة
		15	10	0	0	م	م		
أ1	م	3	5	-1	0	1	0	5	5/3 = 1.667
أ2	م	5 الرقم المحوري	2	0	-1	0	1	3	3/5 = 0.6 الصف المحوري
ر ج		8م	7م	−م	−م	م	م	8م	
رج −زج		-8م +15	-7م +10	م	م	0	0		

حيث سنقوم في الخطوة القادمة بإدخال ص1 إلى الحل وبإخراج أ2 من الحل وكما يوضح الجدول رقم (5-2 :4) الآتي:

مزيج الحل	ر ج	ص1	ص2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية	النسبة
		15	10	0	0	م	م		
ص1	15	1	2/5	0	-1/5	0	1/5	3/5	3/5 ÷ 2/5 = 3/2
أ1	م	0	19/5	-1	3/5	1	-3/5	16/5	16/5 ÷ 19/5 = 16/19
ر ج		15	(19م+6)/5	−م	(3م-3)/5	م	(-3م+3)/5	(16م+9)/5	
رج −زج		0	(-19م+4)/5	م	(-3م+3)/5	0	(8م-3)/5		

حيث سيدخل الحل في المرة القادمة ص٢ سيخرج من الحل أ وكما يوضح الجدول الآتي:

مزيج الحل	رج	ص1	ص2	ح1	ح2	أ 1	أ2	الكمية
		15	10	0	0	م	م	
ص1	15	1	0	$\frac{2}{19}$	$\frac{-5}{19}$	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{5}{19}$
ص2	10	0	1	$\frac{-5}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{16}{19}$
ز ج		15	10	$\frac{-20}{19}$	$\frac{-45}{19}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{45}{19}$	$\frac{235}{19}$
رج - زج		0	0	$\frac{20}{19}$	$\frac{45}{19}$	م - $\frac{20}{19}$	م - $\frac{45}{19}$	

نلاحظ من الصف الأخير في الجدول أعلاه أن كل القيم هي مساوية أو أكبر من صفر (0≤) وهذا يعني أننا وصلنا للحل الأمثل حيث:

ص1 = $\frac{5}{19}$ و ص2 = $\frac{16}{19}$

وأن قيمة الحل الأمثل= 19/235، وهذه القيمة هي نفس قيمة الحل الأمثل للمشكلة الأولية ولنفس المثال والتي كان حلها كما يأتي:

س1 = $\frac{20}{19}$ و س2 = $\frac{45}{19}$

وقيمة الحل الأمثل: = $\frac{235}{19}$

مما تقدم يمكن وضع الخاصية الآتية: إذا كان هناك حل أمثل للمشكلة الثانية فإن هناك حل أمثل للمشكلة الأولية والعكس بالعكس، وبالإضافة لذلك فإن قيم الحل الأمثل للحل الأولي والثاني هي متساوية، كذلك يمكن القول بأن قيم متغيرات الحل الثاني مساوية لأسعار الظل، أي أن قيم متغيرات الحل الثاني المثلى تبين قيمة الوحدة الإضافية من المصادر أو المدخلات.

من خلال ما تقدم يمكن وضع التفسيرات الآتية والمتعلقة بالمشكلة الأولية والمشكلة الثانية:

أ- المشكلة الأولية The Primal Problem

إذا علمت قيمة الوحدة الواحدة من المنتجات فالمطلوب تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل نوع من هذه المنتجات وذلك لتعظيم قيمة المنتجات تتضمن الحالات القيدية شرطاً بأن تكون الكميات المستخدمة من كل من المصادر المتاحة مساوية أو أقل للكميات المتاحة.

ب- المشكلة الثانية The Dual Problem

إذا علمت الكمية المتاحة من كل مصدر المطلوب تحديد قيمة الوحدة الواحدة من هذه المصادر وبذلك الشكل الذي يؤدي إلى تقليل قيم المصادر إلى حدها الأدنى، تتضمن الحالات القيدية شرطاً بأن تكون القيمة الكلية للمصادر والمتعلقة بالوحدة الوحدة مساوية أو أكثر لقيمة الوحدة المنتجة الواحدة.

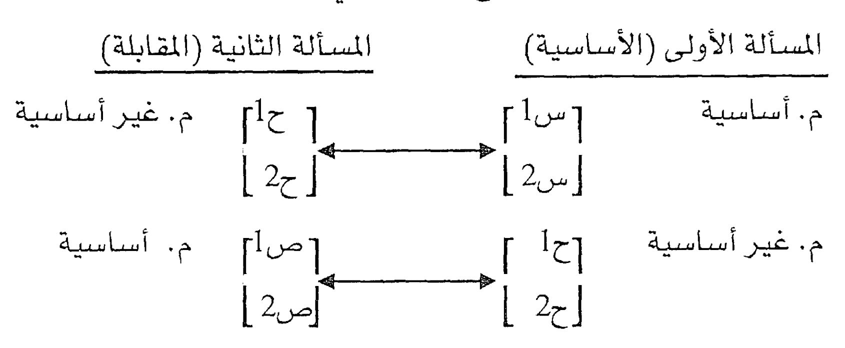
واعتمادا على العلاقات السابقة فإنه يمكن الوصول إلى الحل الأمثل للمسألة من الحل الأمثل للمسألة الأولى مباشرة، وفيما يلي توضيح لذلك على مثالنا:

الحل الأمثل للمسألة الرئيسية

مزيج الحل	رج	س1	س2	ح1	ح2	الكمية
		5	3	0	0	
س1	5	1	0	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
س2	3	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{45}{19}$
زج		5	3	$\frac{5}{19}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{235}{19}$
رج - زج		0	0	$\frac{-5}{19}$	$\frac{-16}{19}$	

خطوات إيجاد الحل الأمثل للمسألة الثانية:

1- تحديد المتغيرات التي لم تدخل في المسألة الأولى وتحديدها مقابلاتها في المسألة الثانية، وهذه المقابلات هي التي تدخل الحل في المسألة الثانية، وهذا يعني أن المتغيرات الأساسية في الأولى تصبح مقابلاتها غير أساسية في الثانية ومقابلات المتغيرات غير الأساسية تصبح أساسية في المسألة الثانية.



وبذلك تكون المتغيرات الداخلة في المسألة الثانية هي (ص1، ص2).

2- إن أسعار الظل في المسألة الأولى هي الكميات في المسألة الثانية وحيث إن سعر الظل إلى ح1 هو 19/5 وإلى ح2 19/16 لذلك تكون كميات ص1، ص2 (19/5، 19/16) وعلى التوالي.

3- إن كميات المتغيرات الأساسية في المسألة الأولى وهي 19/20، 19/45 إلى كل من س1 وس2 تصبح أسعار الظل ح1 وح2 في المسألة الثانية.

4- إن كمية الربح في المسألة الأولى هي كمية التكاليف في المسألة الثانية لذلك تبقى كما هي 19/235.

وتمثل المصفوفة التالية تطبيقاً للخطوات السابقة على المصفوفة النهائية للحل الثاني مع الأخذ بعين الاعتبار أن معاملات المتغيرات الأساسية في الصف رج- زج هي أصفار.

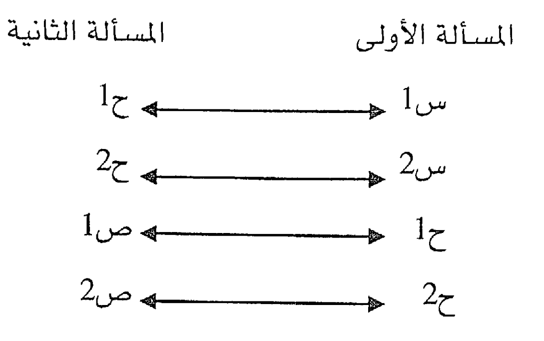
مزيج الحل	رج	ص1	ص2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية
	↓	15	10	0	0	م	م	
ص1	15							$\frac{5}{19}$
ص2	10							$\frac{16}{19}$
رج		15	10	$-\frac{20}{19}$	$-\frac{45}{19}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{45}{19}$	$\frac{235}{19}$
رج - زج		0	0	$\frac{20}{19}$	$\frac{45}{19}$	م - $\frac{20}{19}$	م - $\frac{45}{19}$	

فيما يلي توضيح لكيفية تعبئة باقي بنود المصفوفة.

1- بالنسبة للمتغيرات الأساسية هنا وهي ص1، ص2، فإن معاملاتها مع نفسها تكون واحدا ومع المتغير الأساسي الآخر صفراً وتسمى هذه مصفوفة الوحدة Unit or Identity Matrix ويظهر هذا الجزء من المصفوفة كما يلي.

	ص1	ص2
ص1	1	0
ص2	0	1

2- أما بالنسبة للقيم الأخرى فإنها تحدد وفقاً للعلاقات بين المتغيرات والتي سبقت الإشارة إليها وسوف نكررها هنا لأغراض التوضيح.



وبناء على ذلك فإن قيم ح1 تصبح قيما إلى ص1 وقيم ح2 تصبح قيما إلى ص2 وهكذا بالنسبة لبقية المتغيرات.

فلو نظرنا مثلا إلى العمود ح1 في مصفوفة الحل النهائي للمسألة الأولى، فإن القيمة -19/2 والواقعة عند التقاء ح1 مع س1 سوف تقع في الحل الجديد عند التقاء ص1 مع ح1 مع مراعاة عكس الإشارة لتصبح 19/2 وكذلك نقطة التقاء ح1 مع س2 (19/5) سوف تصبح نقطة الالتقاء ص1 مع ح2 (-19/5)، وبذلك يصبح الصف ص١ في مصفوفة الحل النهائي للمسألة الثانية كما يلي:

	ص1	ص2	ح1	ح2	أ 1	أ2
ص1	1	0	$\frac{2}{19}$	$\frac{-5}{19}$	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$

أما بالنسبة إلى ص2 فإنها تحدد بناء على قيم ح2 مع المتغيرات الأخرى.

الحل الأساسي	الحل الثاني
ح2 مع س2 = $\frac{3}{19}$ تصبح	ص2 مع ح2 = $\frac{3}{19}$

	ص1	ص2	ح1	ح2	أ 1	أ2
ص1	1	0	$\frac{-5}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$

هذا مع الملاحظة هنا بأن قيم أ1 و أ2 هي نفس قيم ح1 وح2 مع عكس الإشارات فقط، وبذلك تصبح المصفوفة النهائية للحل الثاني كما يلي:

مزيج الحل	رج	ص1	ص2	ح1	ح2	أ1	أ2	الكمية
		15	10	0	0	م	م	
ص1	15	1	0	$\frac{2}{19}$	$\frac{-5}{19}$	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{5}{19}$
ص2	10	0	1	$\frac{-5}{19}$	$\frac{3}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{16}{19}$
ر ج		15	10	$\frac{-20}{19}$	$\frac{-45}{19}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{45}{19}$	$\frac{235}{19}$
رج – زج		0	0	$\frac{20}{19}$	$\frac{45}{19}$	م - $\frac{20}{19}$	م - $\frac{45}{19}$	

3-2-5 الحل الثنائي وتخفيض التكاليف:

لقد سبق الإشارة إلى أن إشارات القيود الأساسية في حالات تعظيم الأرباح تكون (≥)، وعند تحويل مسألة تعظيم الأرباح إلى مسألة مقابلة فإننا نحولها إلى مسألة تخفيض تكاليف والتي تكون إشارتها (≤).

أما إذا كانت المسألة الأساسية هي مسألة تخفيض التكاليف فإن إشاراتها تكون (≤) عند تحويلها إلى مسألة مقابلة فإن المسألة الجديدة تكون مسألة تعظيم وبإشارات (≥).

فلو كانت لدينا المسألة التالية

تخفيض ر= 3س1+5س2

علماً بأن:

س 1 ≤ 4

2 س2 ≤ 12

3س1 + 2 س2 ≤18

فإن المسألة الثانية أو المقابلة لها هي:

عظم ر= 4 ص1+12 ص2 + 18 ص3

علما بأن:

ص1 + 0 ص2 + 3 ص3 ≥ 3

0 ص1+2 ص2 + 2 ص3 ≥ 5

5-2 -4 الحل الثنائي واختلاف إشارات القيود:

في الحالتين السابقتين كنا قد افترضنا الصيغ العامة لإشارات القيود وهي (≥) في حالة تعظيم الأرباح (≤) في حالة تخفيض، وقد قمنا بصياغة المسائل المقابلة بعكس الإشارات وفقاً للقاعدة الأساسية.

أما إذا كانت إشارات القيود مختلفة فإننا قبل أن نبدأ بصياغة الحل المقابل فإنه لا بد من إرجاع الإشارات إلى صيغتها الأساسية وفيما يلي توضيحاً لذلك:

أ- تعظيم الأرباح واختلاف الإشارات:

تعظيم ر= 3س1+5س2

علما بأن:

س1 ≥ 4

2 س2 =12

3س1+ 2س2 ≤ 18

أن الخطوة الأولى هنا هي تحويل القيود إلى الإشارات الأساسية لمسألة التعظيم (≥)، وذلك كما يلي:

القيد الأول: يبقى كما هو لأنه يتفق مع الإشارة الأساسية.

القيد الثاني: إن هذا القيد يتكون في الواقع من قيدين بإشارتين مختلفتين وهما:

2س2 ≥ 12

2س2 ≤ 12

فالبنسبة للأول يبقى كما هو أما الثاني فمن أجل تحويل إشارته إلى (≥) فإننا نضربه في -1 ليصبح:

-2س2 ≥ -12

القيد الثالث: فمن أجل تحويل إشارة هذاالقيد من (≤) إلى (≥) فإننا نضرب في -1 ليصبح:

-3 س1+ -2س2 ≥ -18

وبذلك تصبح المسألة الأساسية كما يلي:

عظم ر= 3س 1+ 5س2

علماً بأن:

س1 ≤ 4

2 س2 ≤12

-2س2 ≥ -12

-3س1 +-2 س2 ≥-18

المسألة المقابلة أو الثانية:

خفض ر= 4 ص1+12ص2-21ص3-18ص4

علماً بأن:

ص1+ 0 ص2- 0 ص3- 3ص4 ≤ 3

0ص1+ 2 ص2- 2 ص3- ص4 ≥ 5

ب- تخفيض التكاليف واختلاف الإشارات:

نقوم هنا بإرجاع إشارات جميع القيود إلى وضعها الأساسي وهو (≤)، ومن ثم نقوم بصياغة المسألة المقابلة.

خفض ر= 3س1+5س2

علماً بأن:

س1 ≤ 4

2 س2 =12

3س1 +2 س2 ≤ 18

تحويل إشارات القيود:

القيد الأول: -1(س1 ≥ 4) = − س ≤ -4

القيد الثاني قبل التحويل:

2س2 ≥ 12

2س2 ≤ 12

بعد التحويل:

-1(2س2 ≥ 12) = − 2س2 ≤ -12

2س ≤ 12

القيد الثالث يبقى كما هو لأن إشارته الأساسية هي (≤)

وبذلك تصبح المسألة الأساسية بالشكل التالي:

خفض ر= 3س1+5س2

علماً بأن:

−س1 ≤ -4

-2 س2 ≤ -12

2س2 ≤ 12

3س1 +2 س2 ≤ 18

المسألة المقابلة:

عظم ر= −4 ص1-12 ص2+12ص3 + 18 ص4

علماً بأن:

−ص1+ 0 ص2+ 0 ص 3 +3ص4 ≥ 3

0 ص1-2 ص2+ 2 ص 3 + ص4 ≥ 5

قد يتبادر إلى الذهن هنا بأننا قد خالفنا إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط اللاسلبية لأن جانب الكميات في المسائل الرئيسية قد احتوى على كميات بإشارة سالبة وهي (-12، -18) في تعظيم الرباح وكذلك (-4، 12) في تخفيض التكاليف.

والواقع أن هذه لا تمثل تجاوزاً لشرط اللاسلبية لأن هذه الكميات المسألة الأساسية قد أصبحت عناصر في دالة الهدف في المسألة المقابلة ولا يوجد ما يمنع بأن تأخذ عناصر دالة الهدف قيماً سالبة.

ومن هنا تظهر أهمية الإلمام بأساليب الحل المقابل، فعلاوة على إنها تساعد في الحل عند تحويل دالة الهدف لتصبح الكميات أو الموارد بدلاً من الأرباح أو التكاليف، فإنها كذلك تساعد في إيجاد الحل عند مواجهة بعض المشاكل كتجاوز شرط اللاسلبية مثلا والذي قد يظهر لأي من الأسباب التي سبقت الإشارة في الجزء المتعلق بتحليل الحساسية كتلك المتعلقة بتغيير الكميات أو إضافة قيود جديدة.

وفيما يلي مثال توضيحي لمثل هذه الحالة:

تعظيم ر= 3س1 + 5س2

علما بأن:

س1 ≤ 4

2 س2 =12

3س1 +2 س2 ≥ 18

إن الحل الأمثل لهذا المثال هو:

مزيج	رج	س1	س2	ح1	ح2	ح3	الكمية
الحل	↓←	3	5	0	0	0	
ح1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
س2	5	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
س1	3	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
ز ج		3	5	0	1.5	1	36
رج – زج		0	0	0	1.5-	1-	

أن حدود الكميات هنا هي:

	الكمية		$ح_1$		
حدود القيد الأول=	2	÷	1	=	2
	6	÷	0	=	∞
	2	÷	0	=	∞

الحد الأدنى = 4 - 2 = 2

الحد الأعلى = 4 + ∞ = ∞

	الكمية		$ح_1$		
حدود القيد الثاني=	2	÷	$\frac{1}{3}$	=	6
	6	÷	$\frac{1}{2}$	=	12
	2	÷	$\frac{-1}{3}$	=	6-

الحد الأدنى= 12 - 6 = 6

الحد الأعلى= 12 + |6-| = 18

	الكمية		$ح_1$		
حدود القيد الثالث	2	÷	$\frac{-1}{3}$	=	6-
	6	÷	0	=	∞
	2	÷	$\frac{1}{3}$	=	6

الحد الأدنى= 18 - 6 = 12

الحد الأعلى= 18 + |6-| = 24

وتعني هذه الحدود أن الحل الحالي يبقى مثاليا فيما لو أنقصنا الكميات إلى حدودها الدنيا أو رفعناها إلى حدودها العليا أما إذا تجاوزنا هذه الحدود فإن الحل الحالي سوف يتغير.

والآن لو افترضنا أن القيد الثاني قد تغير من 2س2 ≤ 12 إلى 2س2 ≤ 24، وهذا يعني أن مقدار التغير في الكمية هو 12 ولو افترضنا أيضا أنه كان لا بد من التعامل مع هذا الواقع الجديد فكيف يمكن أن نشرع بعملية الحل، في الواقع يمكن اتباع إحدى طريقتين:

أ- حل المسألة بالكامل وفق هذا القيد الجديد.

ب- الاستفادة من مبادئ نظرية الحل المقابل Duality في سبيل الوصول إلى الحل دون الجوء إلى الحل بالكامل.

وسوف نقوم هنا بتوضيح الطريقة الثانية حيث أننا قد أعطينا أمثلة كافية على الطريقة الأولى.

خطوات الحل:

1- إيجاد الكميات الجديدة في جدول الحل النهائي والناتجة عن التغير في الكمية الأساسية للقيد الثاني:

$$6 = 2 + \frac{(1)}{3}\ 12$$

$$2- = 2 + \frac{(1-)}{3}\ 12$$

$$12 = 6 + \frac{(1)}{2}\ 12$$

2- استبدال الكميات الموجودة في جدول الحل النهائي بالكميات الجديدة الناتجة عن التغير لذلك فإن جدول الحل النهائي يكون كالآتي:

رج		3	5	0	0	0	
	متغيرات	س1	س2	ح1	ح2	ح3	الكميات
0	ح1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1-}{3}$	6
3	س1	1	0	0	$\frac{1-}{3}$	$\frac{1}{3}$	2-
5	س2	0	1	0	$\frac{1-}{2}$	0	12
	ز ج	3	5	0	1.5	1	54
	رج - زج	0	0	0	1.5-	1-	

3-إيجاد الحل المقابل إلى هذا الحل وذلك للتخلص من الإشارة السالبة:

أمام الكمية (-2) هذا مع الأخذ باعتبار أن كميات المسألة الأساسية هي 4، 24، 18 للقيود الأول والثاني والثالث على التوالي، وهذه الكميات هي بنفس الوقت مكونات دالة الهدف في المسألة المقابلة والتي تهدف إلى التخفيض وليس التعظيم.

الحل المقابل

رج		4-	24-	18-	0	0	
	متغيرات	ص1	ص2	ص3	ح1	ح2	الكميات
24-	ص2	$\frac{1-}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1-}{2}$	1.5 (مُحاط بدائرة)
18-	ص3	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	1
	ز ج	2	24-	18-	2-	12	54 -
	رج - زج	6-	0	0	2 (مُحاط بدائرة)	12-	

وهنا نلاحظ أن الكمية السالبة في الجدول الساب قد تحولت إلى قيمة موجبة في الصف رج-زج وهذا يعني ضرورة الاستمرار بالحل في سبيل الوصول إلى الحل النهائي ومن أجل ذلك تدخل ح1 وتخرج س2.

رج	متغيرات	4-	24-	18-	0	0	
		ص1	ص2	ص3	ح1	ح2	الكميات
0	ح1	1-	3	0	1	1.5-	4.5
18-	ص3	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	2.5
	ز ج	0	18-	18-	0	9	45 -
	رج - زج	4-	6-	0	0	9-	

ونتيجة عدم وجود قيم موجبة رج-زج يكون حل المسألة المقابلة قد انتهى.

4- بما أننا قمنا بإيجاد وحل المسألة المقابلة للتخلص من الإشارة السالبة في المسألة الرئيسية فإننا نقوم الآن بالاستعانة بالحل النهائي للمسألة الرئيسية معتمدين على الحل النهائي لمقابلتها.

حل المسألة الرئيسية:

ر.ج	متغيرات	3	5	0	0	0	
		س1	س2	ح1	ح2	ح3	الكميات
0	ح1	0	0	1	0	0	4
5	س2	$\frac{3-}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	9
0	ح2	3-	0	0	1	1-	6
	ز ج	7.5	5	0	0	$\frac{5}{2}$	45
	رج - زج	4.5-	0	0	0	2.5-	

تمارين

1- حل ما يلي باستخدام الطريقة المبسطة أو الرسم البياني:

عظم 5 س$_1$+ 3 س$_2$

علما بأن:

4 س$_1$ + 2س$_2$ ≥ 20

4 س$_1$ + 4س$_2$ ≥ 16

2- حل السؤال الأول بعد إضافة القيد 1 ≥ 4

3- حل السؤال الأول بعد تغيير القيد ليصبح 4 س$_1$ + 2 س$_2$ = 20.

4- حل السؤال الأول بعد استبدال القيد الأول ليصبح س$_1$ - س 2 ≥ -2.

5- حل السؤال الأول بعد إضافة القيد 1≤6.

6- لو كانت لديكم المسألة التالية:

خفض 6 س$_1$+5س$_2$

علماً بأن:

2 س$_1$ +4 س 2 ≤ 40

3 س$_1$ + 2س 2 ≤ 50

2.5س$_1$ +2.5 س$_2$ ≤ 47.5

3 س$_1$ + 1.5 س$_2$ ≤ 55

المطلوب:

أ- أكتب صيغة المسألة المقابلة لهذه المسألة.

ب- أوجد نتيجة الحل المقابل باستخدام الطريقة المبسطة.

ج-أوجد حل المسألة الرئيسية اعتمادا على نتيجة (ب) وذلك دون اللجوء إلى حل المسألة الرئيسية بالكامل.

7- اكتب الصيغة المقابلة لكل ما يلي:

أ- عظم 5س1+ 3س2 + س3

علماً بأن:

5س1+ 3س2 ≥ 50

2س2+ س3 ≤ 20

2س1+ 3س2 - س3 = 26

ب-خفض 6 س1-2 س2

علماً بأن:

3 س1+ 4 س2 ≤ 50

س1+2 س2 = 20

2س1+ 3 س2 ≥ 45

8- لو كانت لديكم المسألة التالية:

خفض 300س1+800 س2

علماً بأن:

2س1+ 2 س2 ≥ 2

4 س1+ 2 س2 ≤ 2

10 س1+ 20 س2 ≤ 2

س1+ س2 = 2

أ- أوجد الحل بيانياً وباستخدام الطريقة المبسطة.

ب- أوجد تأثير أسعار الظل على كل من التالي:

1- زيادة كمية القيد الأول بمقدار1.

2- تخفيض كمية القيد الأول بمقدار 0.2

3- زيادة كمية القيد الأول بمقدار 0.2

4- تخفيض كمية القيد الأول بمقدار 1

5- تخفيض كمية القيد الثالث بمقدار 1

6- زيادة كمية القيد الرابع بمقدار 0.2.

9- أوجد الحل المقابل للسؤال الثامن وقارن ذلك بنتيجة حل المسألة الرئيسية.

10- لو أعطيت إليكم المسألة التالية:

عظم 50س1+ 40س2

علما بأن:

س1+ س2 ≤ 5

س1-3 س2 ≥ 0

10 س1+ 15 س2 ≥ 150

20 س1+ 10 س2 ≥ 160

30 س1+ 10 س2 ≤ 135

أ- أوجد الحدود الدنيا والعليا لعناصر دالة الهدف.

ب- أوجد الحدود الدنيا والعليا لكافة الكميات.

11- أجب على الأسئلة اللاحقة اعتمادا على نتائج المسألة التالية:

عظم 3س1 + 2س2 + س3

علماً بأن:

8 س1+ 9 س2 ≥ 80

3 س1+ 4 س2 + 8 س3 ≥ 45

2 س1+ 6 س3 ≥ 240

أ- ما هو مقدار الزيادة اللازمة في ربح الوحدة من س2 من أجل إدخالها في الحل الأمثل؟

ب- حتى نستطيع إخراج س1 من الحل ما هو مقدار التخفيض اللازم في ربح الوحدة منه؟

ج- لو كانت لديكم المسألة التالية:

عظم 70س1 + 30س2

علماً بأن:

2 س1+ س2 ≥ 1

س1+ 8 س2 ≥4

أ- أوجد الحل بيانياً.

ب- أوجد الحل بالطريقة المبسطة.

ج-ما هي حدود دالة الهدف.

د- ما هي حدود الكميات.

هـ- أوجد الحل الأمثل بعد إضافة القيد.

2س1+2س2 ≤3

12- استخدم الحاسوب في حل ما تراه مناسباً من المسائل السابقة.



الباب الثالث

حالات خاصة في البرمجة الخطية

النقل والتعيين

Transportation and Assignmen

الفصل السادس: النقل والتعيين.

الفصل السادس

النقل والتعيين

6-1: طريقة النقل Transportation

لقد اتسع استخدام أسس ومفاهيم البرمجة الخطية ليشمل نواحي متعددة في مجال اتخاذ القرارات. ومن أهم الطرق التي تم تطويرها بناء على هذا الأسلوب هما طريقتي النقل والتعيين.

وتستخدم طريقة النقل أساساً لتخفيض تكاليف النقل من عدد من المصادر إلى عدد من النقاط. ومن الأمثلة على ذلك النقل من المستودعات إلى المصانع أو بالعكس وكذلك النقل من المصانع أو المستودعات إلى مراكز التوزيع أو من تاجر الجملة إلى تاجر التجزئة.

وبالرغم من أن هذه الطريقة كانت تستخدم أساساً لهذه الغاية ألا أنه قد تم تطويرها لتدخل في مجالات أخرى كتخطيط العمليات الإنتاجية واختيار مواقع مناسبة للمشروعات الصناعية وغيرها.

ويعتبر نموذج مشكلة النقل أكثر كفاءة وفاعلية من النموذج العام للبرمجة الخطية والذي يمكن استخدامه هو الآخر في هذا المجال. ويعتمد هذا النموذج كنموذج الطريقة المبسطة على إيجاد الحل الأولي الممكن ومحاولة تطوير هذا الحل حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل. وتعتبر طريقة النقل أسهل من الطريقة المبسطة وذلك من الناحية الحسابية.

والآتي يبين لنا كيفية استخدام هذه الطريقة في تخفيض تكاليف نقل بعض المواد من مجموعة من المراكز إلى عدد من الأسواق.

مثال (1): ترغب إحدى الشركات الصناعية بنقل ما لديها من مواد من ثلاثة من مراكزها الإنتاجية تلبية لإحتياجات أربعة من الأسواق التجارية. وتظهر الكميات المتوفرة في مركز الإنتاج والكميات المطلوبة من الأسواق كما يلي:

مركز الإنتاج	الكمية المتوفرة (العرض)
1	500
2	700
3	800

الأسواق	الكميات المطلوبة (الطلب)
1	400
2	900
3	200
4	500

هذا مع العلم بأن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المركز الأول إلى الأسواق الأربعة هي على التوالي (12 ,13 ,4 ,6). بينما تبلغ تكاليف نقل الوحدة من المركز الثاني إلى نفس الأسواق (6 ,4 ,10 ,11). أما تكاليف النقل من المركز الثالث فهي (10 ,9 ,12 ,4)

والمطلوب هو سد حاجة الأسواق الأربعة من أي من المراكز الثلاثة بشكل يخفض تكاليف النقل الإجمالية من المراكز إلى الأسواق المختلفة.

ومن أجل حل هذا المثال واتخاذ القرار المناسب فإننا نقوم باستخدام طريقة النقل والتي تبدأ بضرورة تمثيل هذا السؤال على شكل مصفوفة أو جدول نقل وذلك كما يلي:

الأسواق

مراكز الإنتاج: من / إلى	1	2	3	4	العرض
1	12	13	4	6	500
2	6	4	10	11	700
3	10	9	12	4	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وتمثل هذه المصفوفة الكميات المتوفرة أو الطاقة التوزيعية (العرض) لمراكز التوزيع الإنتاجية الثلاثة وكذلك الكميات المطلوبة من الأسواق الأربعة إضافة إلى تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مركز إلى كل الأسواق. وهذه التكاليف تظهر في الزاوية اليمنى لكل خانة (مربع) من خانات المصفوفة. فالرقم 12 في أقصى يمين المصفوفة يعني تكلفة نقل وحدة واحدة من المركز الأول إلى السوق الأول وهكذا.

وتشتمل خطوات حل هذه المصفوفة باستخدام طريقة النقل على نقطتين أساسيتين هما: (1) إيجاد الحل الأولي. (2) إيجاد الحل النهائي.

6-1-1: **طريقة إيجاد الحل الأولي أو المبدئي** :Initial Solution وهناك ثلاثة طرق رئيسية للقيام بذلك وهي:

(أ) **طريقة الزاوية الشمالية الشرقية:** North- East Corner rule

وفي المؤلفات المكتوبة بالإنجليزية تسمى هذه الطريقة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية North-West Corner Rule وبموجب هذه الطريقة نبدأ من الزاوية الشمالية الشرقية أقصى اليمين- حيث نقوم بسد حاجة السوق الأول من المركز الأول، وفي هذا المثال نضع 400 في الخانة الثانية، وهذا يعني أننا قد قمنا بتغطية حاجة السوق الأول جميعها من المركز الأول وبقي لدينا فائض في هذا المركز بمقدار 100 وحدة. وهذا يمثل الفرق بين عرض المركز الأول وطلب السوق الأول. وبعدها ننتقل إلى السوق (العمود) الثاني ونأخذ الصفوف بالتسلسل. وبما أنه كان قد تبقى لدينا 100 وحدة في المركز الأول ،فإننا نضعها عند نقطة التقاء العمود الثاني مع الصف الأول. وبذلك نكون قد اقترحنا توزيع 100 وحدة من المركز الأول إلى السوق الثاني ليبقى هذا السوق بحاجة إلى 800 وحدة (900-100). وبعد أن أخذنا جميع طاقة المركز الأول ننتقل إلى المركز الثاني وهو يحتوي على 700 وحدة فقط. وهذه تؤخذ جميعاً وتوضع عند نقطة التقاء العمود الثاني والصف الثاني. وحتى هذه النقطة نكون قد وزعنا للمركز الثاني 800 وحدة فقط. وبما أننا قد استنفدنا جميع طاقة المركزين الأول والثاني، فإننا نقوم بأخذ المتبقي للسوق الثاني وهو 100 وحدة (-800 900) من المركز الثالث. أما حاجة السوق الثالث والرابع فنقوم بتغطيتها من الكمية المتبقية لدى المركز الثالث وهي 700 وحدة. وهذه كما نرى كافية لسد حاجة السوقين. وفيما يلي توضيح لنتائج هذه الخطوة.

إلى / من	1	2	3	4	العرض
1	12 (400)	13 (100)	4 (200)	6	500
2	6	4 (700)	10	11	700
3	10	9 (100)	12 (200)	4 (500)	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وتمثل الأرقام المحاطة بالدوائر الكميات التي نقترح نقلها من كل مركز إلى كل سوق. والخانات الموجودة بها هذه الأرقام تسمى بالخانات أو الخلايا المستعملة .Used Cells وكما نلاحظ هنا فإن الخانات المستعملة يجب أن يساوي [(عدد الصفوف + عدد الأعمدة)-1]. وتطبيقاً لذلك فإن عدد الخانات المستعملة هنا=(3+4)-1=6.

ونلاحظ مما سبق أن طريقة الزاوية الشمالي الشرقية لا تهتم بالتكاليف وإنما في توزيع العرض وإشباع الطلب.

بما أننا ما زلنا في مرحلة الحل الأولى، فسوف ننتقل إلى الطرق الأخرى التي يمكن استخدامها في هذه المرحلة قبل البحث عن الحل الأمثل والذي سوف نتطرق إليه بالتفصيل بعد الإنتهاء من توضيح أساليب الحل الأولى.

(ب)- **طريقة أقل التكاليف** The least-Cost Method

وبموجب هذه الطريقة فإننا لا نلتزم بالشروع في الحل من الزاوية الشمالية الشرقية التي لا تأخذ التكاليف بعين الاعتبار مبدئياً، وإنما نقوم بالاعتماد على أقل التكاليف كأساس لعملية التوزيع وذلك كما يلي:

1- تحديد أقل التكاليف في المصفوفة وإجراء التوزيعات اللازمة للخانات المشتملة على هذه التكاليف، وأقل تكلفة هنا هي 4 وهي موجودة في الخانات (3,1)، (2,2)، (4,3)، والرقم الأول هنا يمثل الصف والثاني يمثل العمود.

فإذا أخذنا النقطة (3,1) فإننا نضع بها 200 وحدة وهذه تمثل جميع حاجة السوق الثالث ما دام أن المركز الأول يحتوي على أكثر من ذلك حيث يتبقى لديه بعد ذلك 300 وحدة (500-200). أما النقطة (2,2) فإننا نضع بها 700 وحدة وهي جميع ما لدى المركز الثاني. ونكرر هنا أن العرض أو الطلب- أيهما أقل- هو الذي يؤخذ بعين الاعتبار. وهذا يعني أنه بالرغم من حاجة المركز الثاني إلى 900 وحدة، فإننا لم نستطيع أن ننقل إليه أكثر من 700 وحدة من المركز الثاني حيث أنها تمثل كامل طاقته، هذا بالرغم من أن الخانة (2,2) تحتوي على أقل التكاليف. وبالنسبة للتقطة (4,3) فإننا نضع بها 500 وحدة لنفس الأسباب التي ذكرناها سابقاً.

2- البحث عن أقل التكاليف المتقية واستخدام نفس مبدأ الخطوة الأولى.

وهنا نجد أن أقل تكلفة هي 6 في الخانات (4,1)،(1,2)، فلو أخذنا الخانة (4,1) فإننا نلاحظ أننا لانستطيع أن نضع بها شيئ وذلك لأننا قد قمنا بسد جميع حاجة السوق الأول في الخطوة الأولى. وكذلك لا نستطيع أن نضع أي شيئ في الخانة (1,2) لأننا كنا قد استنفذنا جميع طاقة المركز الثاني.

3- الاستمرار بهذا التسلسل حتى نقوم بإشباع دميع احتياجات الأسواق المختلفة

إلى / من	1	2	3	4	العرض
1	12 (300)	13	4 (200)	6	500
2	6	4 (700)	10	11	700
3	10 (100)	9 (200)	12	4 (500)	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

(ج) طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation

تعتبر هذه الطريقة ببساطة طريقة الزاوية الشمالية الشرقية ولكنها تمتاز عنها في أنها تساعد في سرعة الوصول إلى الحل النهائي والذي يمكن التوصل إليه أحياناً من الخطوة الأولى.

تعتمد هذه الطريقة في أساسها على تخفيف الندم الناتج عن اتخاذ القرار غير المناسب.

ويتلخص إيجاد الحل الأولي باستخدام هذه الطريقة بمجموعة من الخطوات الرئيسية والمتكررة. وهذه هي:

1- إيجاد قيم الندم لكافة الصفوف والأعمدة وذلك بأن نأخذ أقل قيمة في كل من الصفوف والأعمدة ونطرحها من القيمة التي تليها في ذلك الصف أو العمود. وتسهيلاً لتتبع هذه العملية، فإنه من المفضل وضع الأرقام الناتجة بجانب الصفوف أو الأعمدة المتعلقة بها.

2- تحديد العمود أو الصف الذي حتوي على أعلى قيمة ندم ومن ثم وضع الكمية المناسبة في الخانة ذات التكلفة الأقل. ونتيجة ذلك نقوم باستثناء ذلك الصف أو العمود من حساباتنا اللاحقة.

والهدف من هاتين الخطوتين هو محاولة الوصول إلى أقل التكاليف والتخلص من الندم الأعلى بشكل مسبق.

3- تكرار الخطوتين السابقتين حتى تكتمل عملية التوزيع.

نتائج تطبيق هذه الطريقة على نفس المثال السابق:

من \ إلى	1	2	3	4	العرض				
1	12	13	4 (200)	6 (300)	500	~~2~~	6		
2	6	4 (700)	10	11	700	2	2	~~2~~	6
3	10 (400)	9 (200)	12	4 (200)	800	5	5	~~5~~	3
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000				
	4	5	6	2					
	4	5		~~2~~					
	4	5		7					
	4	5							
	4								

كما سبق وأسلفنا فإن هذه الطرق الثلاث تمثل الحل الأولي. وفيما يلي توضيح لأسباب الوصول إلى الحل النهائي.

2-1-6 طرق الوصول إلى الحل النهائي:

هناك طريقتان رئيسيتان يمكن بواسطتهما حل مصفوفة النقل السابقة والوصول إلى الحل النهائي. وهاتان الطريقتان هما:

1- طريقة التوزيع المعدلة MODI)The Modified Distribution Method

2- طريقة حجر التنقل Stepping Stone Method

1- طريقة التوزيع المعدلة:

قبل الشروع في توضيح خطوات هذه الطريقة ولأغراض التبسيط فإننا ندرج التكاليف المرتبطة بكل من الصفوف (ص) والأعمدة (ع) كما هي موضحة في المصفوفة موضوع البحث.

ص1+ ع1=12ص2 + ع1= 6 ص3 + ع1= 10

ص1+ ع2=13ص2 + ع2= 4 ص3 + ع2 = 9

ص1+ ع2=13 ص2 + ع3= 10 ص3 + ع3= 12

ص1+ ع4 = 6 ص2 + ع4 =11 ص3+ ع4 = 4

خطوات الحل:

(أ) إيجاد معاملات التكاليف للصفوف والأعمدة بافتراض أن معامل الصف الأول يساوي صفراً. ومن أجل ذلك نعتمد على الخانات المستعملة فقط في سبيل إيجاد المعاملات لكافة الصفوف والأعمدة.

فلو استخدمنا الحل الأولي الناتج عن استعمال الزاوية الشرقية مثلاً فإن الخانات المستعملة هنا هي (ص1، ع1)، (ص1، ع2)، (ص2، ع2)، (ص3،ع2)، (ص3،ع3)،(ص3،ع4).

ومع افتراض أن معامل ص1= صفر ولكون الخانة (ص1،ع1) خانة مستعملة فإننا نستطيع إيجاد معامل ع1 مستفيدين من العلاقة الموضحة سابقاً وهي أن:

ان ص1+ع1=12، وبما أن ص1= صفر فإن ع1=12

0+ع1=12 ع1=12-0=12

وبذلك نكون قد أوجدنا معاملات الصف الأول (ص1) والعمود الأول (ع1). وقبل أن ننتقل من الصف الأول نبحث فيما إذا كانت هناك خانات أخرة مستعملة نستطيع إيجاد المعاملات لأعمدتها. وهنا نرى أن الخانة (ص1،ع2) مستعملة، وباستعمال نفس الأسلوب نوجد معامل ع2:ص1+ ع2=13 ص1=0 إذاً ع2=13

وبعد أن انهينا الصف الأول ننتقل إلى الصف الثاني فنرى أن الخانة (ص2،ع2) مستعملة، وبما أن ع2+ ص2=4، ع2=13 إذا ص2=4-13=-9 وحيث أنه لا يوجد خانات مستعملة في الصف الثاني ننتقل إلى الصف الثالث ونرى أنه يشمل ثلاث خانات مستعملة هي (ص3،ع2) ،(ص3،ع3)،(ص3،ع4).

فلو أخذنا هذا التسلسل فإن لإيجاد معاملاتها يتم بالشكل التالي:

ص3+ ع2= 9 ع1=13 إذا ص3=-4

ص3+ ع3=12 ص3=-4 إذا ع3=16

ص3+ ع4=4 ص2=-4 إذا ع4=8

	إلى / من	1	2	3	4	العرض
ص1= 0	1	12 (400)	13 (100)	4	6	500
ص2 = -9	2	6	4 (700)	10	11	700
ص3= -4	3	10	9 (100)	12 (200)	4 (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

التكاليف الناتجة عن هذا الحل الأولي= (مجموعة أرقام)

14200 = (500) 4 + (200) 12 + (100)9 + (700) 4 + (100) 13 + (400) 12

(ب) إيجاد معايير تحسين الحل أو القيم اتي يمكن أن نخفض بها تكلفة نقل الوحدة الواحدة فيما لو استخدمنا الخانات غير امستعملة. ويمكن إيجاد هذه القيم اعتماداً على القانون التالي:

معيار تحسن الحل= التكلفة الأصلية في الخانة - مجموع معاملات تكاليف الصف والعمود المرتبطين بتلك الخانة.

واعتماداً على ذلك، لو أخذنا مثلاً الخانة (ص1،ع3) على اعتبار أنها غير مستعملة، فإن مقدار خفض التكلفة هو 4-(16+0) =-12. وهذا يعني أننا سوف نخفض التكاليف بمثدار 12 دينار عن كل وحدة نستطيع نقلها من المركز الأول إلى السوق الثالث. وفيما يلي توضيح لكيفية إيجاد باقي القيم

ص1، ع4 = 6 - (8+0) =-2

ص2، غ1 = 6 -(-9+12) =3

ص2، ع3 = 10- (-9+16) =3

ص2، ع4 =11- (-9+8) =12

ص3 ،ع1= 10(-4+12) =2

والقيم الموجبة هنا تعني أننا سوف نزيد تكلفة نقل الوحدة الواحدة بذلك المقدار فيما لو تم استخدام تلك الخانات.

وبعد حساب هذه القيم توضع بداخل الخانات تسهيلاً للعمليات اللاحقة.

	من / إلى	1	2	3	4	العرض
ص1= 0	1	12 (400)	13 (100)	4	6	500
ص2 = -9	2	6 3	4 (700)	10 3	11 12	700
ص3= -4	3	10 2	9 (100)	12 (200)	4 (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

ومن هنا نرى أن الخانتين اللتين يمكن بواسطتهما تخفيض التكاليف هما (ص1،ع3) و(ص1،ع4). وبما أن الأولى تحقق لنا تخفيضاً أعلى (12) فإننا سوف نحاول استخدامها.

(ج) بعد تحديد الخانة التي نريد استخدامها، فإنه لا بد من تحديد الكمية الواجب نقلها من خلالها، ومن أجل ذلك نشرع بتكوين ممر مغلق مبتدئين من تلك الخانة التي قررنا استخدامها آخذين بالاعتبار أن جميع زوايا الممر الأخرى تكون خانات مستخدمة.

وبما أننا نريد استعمال الخانة (ص1،ع3) فإن الخانات التي يمكن أن تساعدنا بتطبيق ما سبق هي (ص1،ع2) ،(ص3،ع2)،(ص3،ع3).

ونلاحظ هنا أننا قد تجاوزنا الخانة (ص2،ع2) بالرغم من أنها مستعملة وذلك لأنها لا تساعدنا في الحصول على الشكل المطلوب.

وبعد عملية تحديد الزوايا هذه نضع إشارة موجبة (+) في الخانة المراد استعمالها وكذلك في الخانة المقابلة لها قطرياً، ونضع إشارة سالبة (-) في الخانتين الأخريين، وهذه الإشارات تعني أننا نريد أن نطرح من الخانات ذات الإشارة السالبة ونضيف إلى تلك ذات الإشارات الموجبة، أما القيمة التي سوف تطرح وتضاف فهي أقل كمية موجودة في

الخانات ذات الإشارات السالبة. وهي هنا (100)، أي الكمية الموجودة في (ص1،ع2). وفيما يلي توضيح لتسلسل هذه العملية.

الكمية الجديدة في الخانة (ص1،ع2)=100-100=0 وهذا يعني أنها أصبحت غير مستعملة.

الكمية الجديدة في الخانة (ص3،ع3)=200 - 100 = 100

الكمية الجديدة في الخانة (ص1،ع3)= 0 + 100 = 100

الكمية الجديدة في الخانة(ص3،ع2)= 100 + 100 = 200

	ع2	ع3
ص1	13 - (100)	4 + 12
ص2	4 (700)	10 3
ص3	9 (100)	12 - (200)

	ع2	ع3
ص1	13 -	4 + (100)
ص2	4	10
ص3	9 (200)	12 (100)

أما باقي الكميات في المصفوفة فتبقى كما هي. وبذلك تصبح المصفوفة الجديدة كالتالي:

إلى / من	1	2	3	4	العرض
1	12 (400)	13	4 (100)	6	500
2	6	4 (700)	10	11	700
3	10	9 (2200)	12 (100)	4 (500)	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وتجدر الإشارة هنا إلى أن معاملات تكاليف الصفوف والأعمدة سوف تتغير نتيجة التغير الحاصل في الخانات المستعملة. كما ويستحسن أن تقوم بجمع الكميات أفقياً وعمودياً للتأكد من مطابقتها لكميات الطلب والعرض الأصلية.

كما ونلاحظ أيضاً أن تكلفة الحل الجديد قد انخفضت عن سابقتها بمقدار 1200 دينار وهي الكمية الناتجة عن نقا 100 وحدة إلى الخانة التي تحقق لنا وفراً في نقل الوحدة بمقدار 12 دينار.

13000 = (500) 4 + (100) 12 + (200) 9 + (700) 4 + (100) 4 + (400) 12

أو 13000 = (12x100) - 14200

(د) تكرار الخطوات الثلاثة السابقة حتى نصل إلى الحل النهائي أو الأمثل وذلك عندما تصبح جميع قيم تخفيض التكاليف أصفاراً أو موجبة، وهذا يعني أننا لا نستطيع تخفيض التكاليف بعد هذه النقطة. وفيما يلي بقية خطوات الحل.

ع1 = 12   ع2 = 1   ع3 = 4   ع4 = -4

	من \ إلى	1	2	3	4	العرض
ص1 = 0	1	12 - (400)	13	4 + (100)	6	500
ص2 = 3	2	6	4 (700)	10	11	700
ص3 = 8	3	10 + -10	9 (200)	12 - (100)	4 (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

ع1 = 12   ع2 = 11   ع3 = 4   ع4 = 6

	من \ إلى	1	2	3	4	العرض
ص1 = 0	1	12 (300)	13	4 + (200)	6 0	500
ص2 = -7	2	6	4 (700)	10	11	700
ص3 = -2	3	10 (100)	9 (200)	12 10	4 (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وبما أننا لم نحصل على أية أرقام سالبة هنا، فهذا يعني أننا قد وصلنا إلى الحل النهائي وبتكلفة إجمالية مقدارها 12000 دينار.

12 (300) + 4 (200) + 4 (700) + 10 (100) + 9 (200) + 4 (500) = 12000

أو 13000 - (10x100) = 12000 دينار

وهذا يعني أننا سوف ننقل من المركز الأول 300 وحدة إلى السوق الأول و200 وحدة إلى السوق الثالث، ومن المركز الثاني ننقل 700 وحدة إلى السوق الثاني، أما من المركز الثالث فسوف ننقل 100 وحدة إلى السوق الأول، 200 إلى الثاني و500 إلى الرابع.

وباستعمال الطريقة المعدلة نستخدم الخطوات السابقة بغض النظر عن الأسلوب المستخدم في الحل الأولي. وبما أننا قد انتهينا من الحل المبتدئ باستخدام الزاوية الشمالية الشرقية، فإننا سوف نقوم بإيجاد الحلول المبدئية بأقل التكاليف وطريقة فوجل.

الحل باستخدام أقل التكاليف والطريقة المعدلة:

ع1 = 12   ع2 = 11   ع3 = 4   ع4 = 6

	من \ إلى	1	2	3	4	العرض
ص1 = 0	1	12 (300)	13	4 (200)	6 0	500
ص2 = -7	2	6	4 (700)	10	11	700
ص3 = -2	3	10 (100)	9 (200)	12 10	4 (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

إجمالي التكاليف 12(300)+4(200)+4(700)+10(100) +9(200)+4(500) = 12000

الحل باستخدام طريقة فوجل والطريقة المعدلة:

ع1 = 12   ع 2 = 11   ع3 = 4   ع4 = 6

من \ إلى	1	2	3	4	العرض
1	12 4	13 6	4 (200)	6 (300)	500
2	6	4 (700)	10	11	700
3	10 (400)	9 (200)	12 6	4 (200)	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

إجمالي التكاليف 4(200)+6(300)+4(700)+10(100) +9(200)+4(200) = 12000

وهذه مجموعة من الملاحظات المتعلقة بالعمليات السابقة:

(1) أنه من الممكن الحصول على الحل النهائي من الخطوة الأولى أو ما يسمى الحل الأولي باستخدام طريقتي أقل التكاليف وفوجل، ولكن هذا نادر أو لا يمكن حدوثه باستعمال الزاوية الشمالية الشرقية. ويرجع السبب في ذلك إلى عدم أخذ التكاليف بعين الاعتبار إذا استعملنا طريقة الزاوية في حلنا الأولي.

(2) تعد الحلول المثلى كما هو واضح في الفرق بين المصفوفة الأخيرة والمصفوفتين النهائيتين السابقتين، فبالرغم من اختلاف الكميات المنقولة في المصفوفة الأخيرة إلا أننا حصلنا على نفس التكاليف.

ويمكن الاستدلال على وجود أو عدم وجود عدة حلول مثلى من خلال وجود أصفار كقيم لخفض التكاليف في المصفوفة النهائية. حيث أن وجود القيم صفر في خانة معينة يعني استعمال هذه الخانة لن يؤثر على حجم التكاليف.

فلو نظرنا مثلاً إلى الخانة (ص1،ع4) المحتوية على الرقم صفر في كل من المصفوفتين السابقتين لهذه المصفوفة. وحاولنا أن ننقل إليها كمية معينة مستعينين بالشكل الممثل بالزوايا (ص1،ع1)، (ص1،ع4)،(ص3،ع1)،(ص3،ع4) كما في الجدول اللاحق، لوجدنا أننا سوف نحصل على المصفوفة النهائية الناتجة عن استعمال طريقة فوجل.

+ (6) 0	(4) 200	(13) 2	- (12) 300
(11) 12	(10) 12	(4) 700	(6) 1
- (4) 500	(12) 10	(9) 200	+ (10) 100

2- طريقة حجر التنقل:

وتعتمد هذه الطريقة على مجموعة من الخطوات المتسلسلة والمتكررة في سبيل الوصول إلى الحل النهائي. وهذه الخطوات هي:

1- تقييم الخانات غير امستعملة وذلك بأن نبدأ بإحدى هذه الخانات ونكون ممراً مغلقاً مبتدئاً بهذه الخانة ومنتهياً بها.

2- مبتدئين بالخانة غير المستعملة نضع إشارة (+) في تلك الخانة وإشارة (-) في الخانة المستعملة التي تليها ومن ثم إشارة (+) في الخانة المستعملة اللاحقة وإشارة (-) في الخانة التي تليها. ونكرر هذه العملية حتى نرجع إلى نقطة البداية. ويجب الملاحظة بأن تحركاتنا تكون بشكل أفقي أو عمودي ولكن ليس قطرياً.

3- نوجد معيار تحسين الحل الناتج عن استخدام هذه الخانة غير المستعملة وذلك بأن نجمع التكاليف في الخانات ذات الإشارة الموجبة ونطرح منها مجموعة التكاليف في تلك ذات الإشارة السالبة.

4- نكرر الخطوات (1-3) إلى جميع الخانات غير المستعملة.

5- اختيار الخانة التي تحقق لنا أفضل معيار للتخفيض وتحديد الكمية التي يمكن نقلها بواسطة هذه الخانة عن طريق تحديد أقل كمية في الخانات ذات الإشارة (-) وطرحها من كافة القيم في تلك الخانات وإضافتها إلى الكميات في الخانات ذات الإشارة الموجبة.

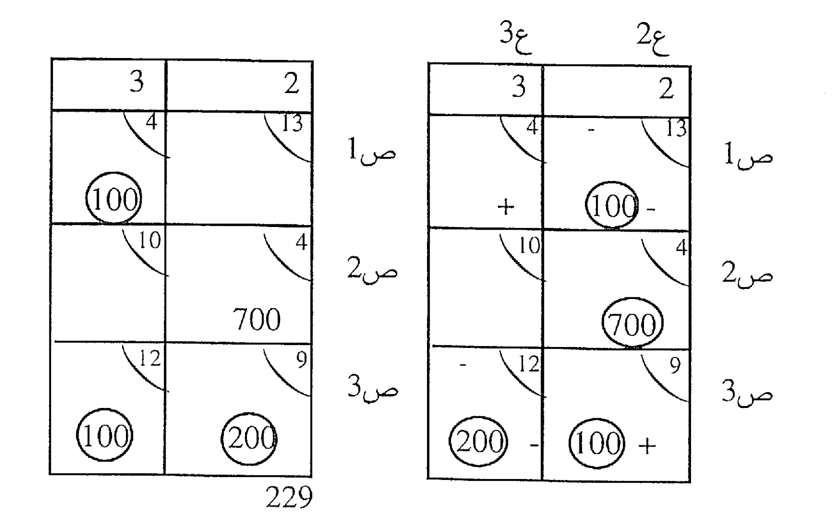
وفيما يلي توضيح لخطوات هذه الطريقة على الحل الأولي الناتج عن استخدام طريقة الزاوية الشمالية الشرقية.

	من \ إلى	1 (ع1)	2 (ع2)	3 (ع3)	4 (ع4)	العرض
ص1	1	12 (400)	13 (100)	4	6	500
ص2	2	6	4 (700)	10	11	700
ص3	3	10	9 (100)	12 (200)	4 (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

تقييم الخانات غير المستعملة:

إن الخانات غير المستعملة في هذه المصفوفات هي (ص1،ع3)، (ص1،ع4)، (ص2،ع1)، (ص2،ع3)، (ص2،ع4)، (ص3،ع1).

فلو بدأنا مثلاً بالخانة (ص1،ع3) فإن الممر المغلق المرتبط بها يتكون من الخانات (ص1،ع2)، (ص1،ع3)، (ص3،ع2). وإن معيار تخفيض التكاليف الناتج عن استخدامها يساوي (9+4) - (12+13) = -12



	ع2 (2)	ع3 (3)
ص1	13 (100) -	4 +
ص2	4 (700)	10
ص3	9 (100) +	12 (200) -

	2	3
ص1	13	4 (100)
ص2	4 700	10
ص3	9 (200)	12 (100)

وبعدها ننتقل إلى الخانات الأخرى.

الخانة	الممر	معيار خفض التكلفة
ص1 ، ع4	(ص1، ع4)، (ص1، ع2)، (ص3، ع2) و (ص3، ع4)،	(6+9) - (4+13) = -2
ص2 ، ع3	(ص2، ع3)، (ص2، ع2)، (ص1، ع1) و (ص1، ع2)،	(6+13) - (4+12) = 3
ص2 ، ع4	(ص2، ع4)، (ص2، ع2)، (ص3، ع2) و (ص3، ع4)،	(11+9) - (4+4) = 12
ص3 ، ع1	(ص3، ع1)، (ص3، ع2)، (ص1، ع1) و (ص3، ع4)،	(13+10) - (9+12) = 2

ومن ذلك نرى أن الخانة (ص1،ع3) تحقق لنا وفراً في تكلفة نقل الوحدة مقدار (−12). لذلك فسوف نبدأ باستخدامها ونحصل على المصفوفة اتالية:

إلى / من	1	2	3	4	العرض
1	12 (400)	13	4 (100)	6	500
2	6	4 (700)	10	11	700
3	10	9 (200)	12 (100)	4 (500)	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وفيما يلي نتائج تطبيق الخطوات السابقة على هذه المصفوفة وكيفية الوصول إلى الحل النهائي:

	من \ إلى	1 (ع1)	2 (ع2)	3 (ع 3)	4 (ع4)	العرض
ص 1	1	12 ┐ (400)	13 ┐ 12	4 ┐ (100)	6 ┐ 10	500
ص2	2	6 ┐ 9-	4 ┐ (700)	10 ┐ 3	11 ┐ 12	700
ص3	3	+ 10 ┐	9 ┐ (100)	12 ┐ - (100)	4 ┐ (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

	من \ إلى	1 (ع1)	2 (ع2)	3 (ع 3)	4 (ع4)	العرض
ص 1	1	12 ┐ (300)	13 ┐ 2	4 ┐ (200)	6 ┐ 0	500
ص2	2	6 ┐ 1	4 ┐ (700)	10 ┐ 13	11 ┐ 12	700
ص3	3	10 ┐ (100)	9 ┐ (200)	12 ┐ 12	4 ┐ (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وفيما يلي توضيح لكيفية إيجاد معايير خفض التكلفة للخانتين (ص2،ع1) و(ص2،ع3) في المصفوفتين على التوالي:

من \ إلى	1	2	3	4	العرض
1	12 - (400)	13	4 + (100)	6	500
2	10 +	9 - (700)	12	4	700
3		+ (200)	- (100)	(500)	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

مجموع التكاليف في الخانات ذات الإشارة (+)- مجموع التكاليف في الخانات ذات الإشارة (-) =(6+4+9) - (12+12+4)=-9

من \ إلى	1	2	3	4	العرض
1	12 + (300)	13	4 - (200)	6	500
2	6	4 (700) -	10 +	11	700
3	10 (100)-	9 (200) +	12	4 (500)	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

معايير خفض التكلفة باستخدام الخانة (ص2،ع2) = (10+9+12)-(4+10+4)= 13

3-1-6 حالات خاصة في طريقة النقل:

لاحظنا في الأجزاء السابقة من هذا الفصل بأن طريقة النقل تعتمد على قاعدتين أساسيتين هما:

1- تساوي كميات العرض والطلب الإجمالي.

2- عدد الخانات المستعملة في كافة مصفوفات الحل يجب أن يساوي (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)-1

وان أي انحراف عن هاتين القاعدتين يعتبر استثناء لا بد من معالجته، وفي هذا الجزء نوضح كيفية معالجة مثل هذه الحالات.

1- عدم تساوي العرض والطلب Unbalanced Problem

وفي هذه الحالة قد يزيد العرض أو الطلب أحدهما على الآخر. وعند مواجهة مثل هذه المشكلة نضيف صفاً أو عموداً وهمياً أو فرضياً يوضع به مقدار الفرق بين العرض والطلب وتكون جميع تكاليف هذا الصف أو العمود أصفاراً.

فمثلاً إذا زادت الكمية المعروضة عن تلك المطلوبة نضيف عموداً وهمياً أما إذا فاقت الكمية المطلوبة عن تلك المعروضة فإننا نضيف صفاً وهمياً وفق الشروط آنفة الذكر.

فلو افترضنا أن الكمية المتوفرة في المركز الثالث (ص3) قد ارتفعت إل 900 بدلاً من 800 ليصبح إجمالي العرض 2100-في حين يبقى الطلب 2000 وحدة. وفي مثل هذه الحالة نضيف عموداً وهمياً توضع به قيمة الفرق وهي 100 وحدة، ويتم اختيار الخانة التي توضع بها هذه الكمية حسب طريقة الحل الأولى المتبعة ما دام أن هذه الكمية سوف تبقى داخل ذلك العمود الوهمي أثناء خطوات البحث عن الحل النهائي.

فلو استعملنا مثلاً طريقة الزاوية الشمالية والطريقة المعدلة فإن عملية الحل تكون كما يلي:

ع1 = 12   ع2 = 13   ع3 = 16   ع4 = 8   ع5=4

من \ إلى	1	2	3	4	5	العرض	
1	[12] (400)	[13] (300)	[4] 12-	[6] 2-	[0] 2-	500	ص1 = 0
2	[6]	[4] (700)	[10] 3	[11] 12	[0] 9	700	ص2= -9
3	[10] 2	[9] (100) +	[12] (200) -	[4] (500)	[0] (100)	900	ص3 = 4
الطلب	400	900	200	500	100	2100 / 2100	

ونلاحظ هنا أن كمية العرض والطلب قد أصبحتا متساويتين، كما أن عدد الخانات المستعملة يساوي (عدد الصفوف+عدد الأعمدة)-1=(3+5)-1=7

ع1 = 12   ع2 =1   ع3 = 4   ع4 = -4   ع5=-8

من \ إلى	1	2	3	4	5	العرض	
1	[12] (400)	[13] 12	[4] (100)	[6] 10	[0] 8	500	ص1 = 0
2	[6] 9-	[4] (700)	[10] 3	[11] 12	[0] 5	700	ص2= -7
3	[10] 10- +	[9] (200)	[12] (100) -	[4] (500)	[0] (100)	900	ص3 = 2
الطلب	400	900	200	500	100	2100 / 2100	

ع1 = 12 ع2 = 11 ع3 = 4 ع4 = 6 ع5=0

إلى / من	1	2	3	4	5	العرض
1	12 (200)	13 2	4 (200)	6 0	0 (100)	500
2	6 1	4 (700)	10 13	11 12	0 7	700
3	10 (200)	9 (200)	12 10	4 (500)	0 2	900
الطلب	400	900	200	500	100	2100 / 2100

ومن خلال هذا الحل النهائي نستطيع ملاحظة أن إجمالي التكاليف ما زال 12000 دينار كما أن كمية الفرق بين العرض والطلب بقيت في نفس العمود الوهمي التي ابتدأت به. كما لاحظنا أيضاً ضرورة مراعاة القواعد المتعلقة بعدد الخانات المستعملة.

وبعد توضيح حل المشكلة مبتدئين بالزاوية الشمالية الشرقية ومستخدمين الطريقة المعدلة للوصول إلى الحل النهائي، فإننا نترك معالجة هذه المشكلة باستخدام طريقتي أقل التكاليف وفوجل للحل الأولي والطريقة المعدلة أو حجر التنقل للحل النهائي للقارئ. هذا مع الأخذ بعين الاعتبار أن العمود الوهمي يجب أن يضاف قبل الشروع في عملية الحل وذلك التزاماً بالقاعدة المتعلقة بوجوب تساوي العرض والطلب.

ولو فرضنا الآن أن كمية الطلب تساوي 2100 وحدة وأن كمية العرض كانت 2000 وحدة. ففي هذه الحالة نضيف صفاً وهمياً توضع به قيمة الفرق وتكون تكاليفه أصفاراً. أما باقي خطوات الحل فتبقى كما هي في الحالات السابقة.

2- الانحراف عن القاعدة المتعلقة بعدد الخانات المستعملة (الدورانية) Degeneracy

تنص هذه القاعدة كما اسلفنا على أن عدد الخانات المستعملة =(عدد الصفوف + عدد الأعمدة) -1

إلا أننا قد نواجه في بعض الحالات انحرافاً عن هذه القاعدة حيث أن عدد الخانات المستعملة يكون أقل من العدد المطلوب. وقد تظهر هذه امشكلة أثناء الحل الأولي أو أثناء البحث عن الحل النهائي. وفي كلتا الحالتين نتبع نفس الأسلوب لمعالجة هذه المشكلة عند ظهورها. وهذه تتم عن طريق افتراض أن إحدى الخانات غير المستعملة هي خانة مستعملة وتمييزها بإشارة (×).

وهناك مجموعة من الأسس تحكم عملية اختيار هذه الخانة ومن أهمها:

(أ) اختيار الخانة ذات أقل كلفة.

(ب) اختيار الخانة التي قد تساعد في إيجاد معاملات تكاليف الصفوف أو الأعمدة كما هو الحال عند استخدام الطريقة المعدلة.

(جـ) اختيار الخانة التي قد تساعد في تكوين زوايا الممرات المغلقة وفقاً لمتطلبات الطريقتين، المعدلة وحجر التنقل.

ولا يوجد هناك قاعدة ثابتة لتفضيل أي من هذه الأسس على غيرها سوى مقدار وطبيعة ملائمتها لمتطلبات الحل. ولا تأخذ هذه الخانة صفة الثبات حيث يمكن تغييرها حسب الحاجة، لذلك فإن عملية الاختيار تصل في بعض الأحيان إلى ما يشبه طريقة التجربة والخطأ.

مثال توضيحي:

لو افترضنا أن كمية العرض للصف الأول في مثالنا الأساسي هي 600 وحدة بدلا من 500، وهذا بطبيعة الحال سوف يزيد من مقدار الكمية المعروضة لتصبح 2100 وحدة، في حين تبقى كمية الطلب على ما هي عليه، أي 2000 وحدة. والمطلوب هو الحل باستخدام طريقة النقل.

وفيما يلي توضيح لخطوات الحل باستخدام الزاوية الشمالية الشرقية والطريقة المعدلة بعد إضافة العمود الوهمي وفقاً للقاعدة المتعلقة بضرورة تساوي كميات العرض والطلب.

ع1 = 12 ع2 = 13 ع3 = 12 ع4 = 4 ع5=0

	من \ إلى	1	2	3	4	5	العرض
ص1 = 0	1	12 (400)	13 (200)	4 -8	6 2	0 (x)	500
ص2 = -9	2	6 3	4 (700)	10 7	11 16	0 9	700
ص3 = 0	3	10 -2	9 -4	12 (200)	4 (500)	0 (100)	800
	الطلب	400	900	200	500	100	2100 / 2100

نلاحظ هنا أن عدد الخانات الأصلية المستعملة هو6 خانات فقط في حين أن القاعدة تقتضي أن يكون عددها (7) أي (5+3)-1

وبعد المباشرة في إيجاد معاملات تكاليف الصفوف والأعمدة وجدنا أنه بالاعتماد على الخانات الست، فإننا لا نستطيع إيجاد سوى معاملات الصفين والعمودين الأوليين (ص1،ع1،ص2،ع2).ومن أجل الاستمرار في عملية الحل كان لا بد من افتراض خانة وهمية، وقد تم اختيار الخانة (ص1،ع5) على اعتبار أنها تساعد في الاستمرار في عملية إيجاد المعاملات وتحتوي على أقل التكاليف. وهناك خانة أخرى قد تفي بهذين الشرطين وهي (ص2،ع5).

وبعد إيجاد معايير تخفيض التكاليف لكافة الخانات غير المستعملة تبين لنا أن أفضلها هي الخانة (ص1،ع3) حيث أنها تحتوي على أفضل معيار وهو (-8). ولكن بعد محاولة تكوين ممر مغلق وجدنا أن الممر الوحيد الذي يفي بهذا الشرط هو المحصور بين الزوايا (ص1،ع3)، (ص1،ع5)، (ص3،ع3)، (ص3،ع5).

	ع3	ع4	ع5
	3	4	5
ص1	(4) + 8-	(6) 2	(0) (x)
ص2			
ص3	(12) - (200)	(4) (500)	(0) + (100)

ونلاحظ هنا أن الخانة ذات أقل كمية من بين الخانات ذات الإشارة السالبة هي (ص1،ع5). وبما أن الكمية الموجودة هنا هي صفر حيث أنها خانة فرضية،فإن الشكل لا يساعد على الاستمرار بالحل حيث أن الكمية المطروحة والمضافة هي صفر. وهذا يعني بقاء الحل على ما هو عليه.

وفي مثل هذه الحالة ننتقل إلى التكلفة الأقل الأخرى وهي (-4).

	ع2	ع3	ع4	ع5
	2	3	4	5
ص1	(13) 200	(4) 8-	(6) 2	(0) + (x)
ص2	(4) 700	(10) 7	(11) 16	(0) 9
ص3	(9) 4 -	(12) (200)	(4) (500)	(0) - (100)

ع1 = 12   ع2 = 13   ع3 = 16   ع4 = 8   ع5=0

	من \ إلى	1	2	3	4	5	العرض
ص1 = 0	1	[12] (400)	[13] 100	[4] 12-	[6] 2-	[0] (100)	600
ص2= -9	2	[6] 3	[4] (700)	[10] 3	[11] 12	[0]	700
ص3 = -4	3	[10] 2	[9] (100)	[12] (200)	[4] (500)	[0]	800
	الطلب	400	900	200	500	100	2100 / 2100

ونلاحظ هنا أن الخانة الوهمية قد أصبحت خانة مستعملة حقيقية ليصبح بذلك عدد الخانات المستعملة 7 بدلا من 60 وقد تحدث مثل هذه الدورانية في الحب بصورة أخرى وذلك بأن تصبح بعض الخانات المستعملة غير مستعملة. فلو افترضنا مثلاً أن الكمية في الخانة (ص1،ع2) كانت 100 وحدة بدلا من 200، فإن كلا من الخانتين (ص1،ع2)، (ص3،ع5) ستصبح غير مستعملة ليحل محلها (ص3،ع2) أو (ص1،ع5) وكما هو موضح أدناه.

	ع2	ع3	ع4	ع5
ص1	[13] (100)	[4]	[6]	[0] + (X)
ص2	[4]	[10]	[11]	[0]
ص3	[9] 4 - +	[12]	[4]	[0] - (100)

وفيما يلي استكمال خطوات الحل:

ع1 = 12 ع2 = 13 ع3 = 16 ع4 = 8 ع5 = 0

	من \ إلى	1	2	3	4	5	العرض
ص1 = 0	1	12 (400)	13 12	4 (100)	6 10	0 (100)	600
ص2 = 9-	2	6 9-	4 (700)	10 3	11 12	0 3-	700
ص3 = 4-	3	10 + 10-	9 (200)	12 - (100)	4 (500)	0 8-	800
	الطلب	400	900	200	500	100	2100 \ 2100

ع1 = 12 ع2 = 13 ع3 = 16 ع4 = 8 ع5 = 0

	من \ إلى	1	2	3	4	5	العرض
ص1 = 0	1	12 (300)	13 2	4 (200)	6	0 (100)	600
ص2 = 7-	2	6 1	4 (700)	10 3	11 12	0 7	700
ص3 = 2-	3	10 (100)	9 (200)	12 10	4 (500)	0 2	800
	الطلب	400	900	200	500	100	2100 \ 2100

وتمثل هذه مصفوفة الحل النهائي بإجمالي تكاليف مقداره 12000 دينار كما هو في سابقاتها. ونلاحظ في هذا المثال ازدياد عدد خطوات الحل. وهذا يرجع في الأساس إلى طريقة اختيار الخانة الوهمية، فقد يكون مثلاً عدد الخطوات أقل أو أكثر لو وضعنا في خانة غير تلك التي وضعت بها وهي (ص1،ع5). ويمكن للقارئ اختيار ذلك عن طريق افتراض خانة وهمية مختلفة في كل مرة.

وأضافة إلى ما سبق فإن من بين الحالات الخاصة التي تصادفنا في مسألة النقل هي وجود بعض الخانات أو الممرات الممنوعة. وفي مثل هذه الحالة فإننا لا تأخذ هذه الخانات بعين الاعتبار ونستمر في الحل على اعتبار أنها ليست موجودة.

فلو افترضنا مثلاً أن الخانتين _ص،ع1) و(ص3،ع3) ممنوعتين، أي أننا لا نستطيع أن ننقل من المركز الأول إلى السوق الأول ولا من المركز الثالث إلى السوق الثالث، فهذا يتطلب منّا عدم إدخالها في عملية الحل. ويمكن تمييزهما بإشارة خاصة تجنباً للخطأ.

4-1-6 طريقة النقل وزيادة الأرباح

بالرغم من أن طريقة النقل تستعمل أساساً كأسلوب لتخفيض تكاليف النقل إضافة إلى استخداماتها المشار إليها آنفاً، إلا أنها أيضاً يمكن أن تستعمل كأسلوب للوصول إلى أفضل المردودات.

فلو افترضنا مثلاً أن الأرقام المعطاة في مثالنا السابق هي اسعار بيع لثلاثة من المنتجات لإي أربعة أسواق، فإننا يمكن أن نتوصل إلى الكميات التي يمكن بيعها في كل سوق وبشكل يحقق لنا أعلى المردودات بتطبيق هذا الأسلوب.

ويوجد هناك بديلان لمعالجة مثل هذه الحالات:

1- تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة تكاليف وحلها كما شرحنا سابقاً.

2- الإبقاء على المصفوفة كما هي ومن ثم حلها باستخدام أساسيات طريقة النقل.

(1) تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة تكاليف:

وتتم عملية التحويل هذه بأن نأخذ أعلى رقم في المصفوفة ونطرح منه كافة قيم (أرباح) المصفوفة. وبذلك نكون قد حولناها إلى مصفوفة ندم أو تكاليف. فبعد طرح أعلى رقم من نفسه مثلاً يكون الناتج صفراً. وهذا يعني أن الندم الناتج عن استخدام تلك الخانة يكون صفراً.

وبعد استكمال عملية الطرح هذه، نقوم بعملية الحل متبعين نفس الخطوات التي تم شرحها في هذا المجال.

وفيما يلي مصفوفة الندم الناتجة عن تطبيق هذه الخطوة على مثالنا حيث أن أعلى سعر موجود بها هو 13 وقد قمنا بطرح كافة قيم المصفوفة من ذلك الرقم.

إلى / من	1	2	3	4	العرض
1	1	0	9	7	500
2	7	9	3	2	700
3	3	4	1	9	800
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

(2) الإبقاء على المصفوفة كما هي:

وهناك مراعاة الاختلاف في معايير استخدامنا أو عدم استخدامنا للخانات. وهذه الاختلافات تشمل:

(أ) اختيار أعلى الأرقام وليس أقلها ، أعلى الأرباح وليس أقل التكاليف.

(ب) معيار تحسن الحل يكون ممتلاً بأعلى رقم موجب وليس بأقل رقم سالب.

(ج) الحل النهائي يكون عندما تكون جميع معايير تحسين الحل > صفر وليس< صفر.

وفيما يلي توضيح لهذه العملية:

أ - الزاوية الشمالية الشرقية والطريقة المعدلة

ع1=12 ع2=13 ع3 =16 ع4 =8

	من \ إلى	1	2	3	4	العرض
ص1=0	1	[12] (400)	[13] (100)	[4] 12-	[6] 2-	500
ص2 = -9	2	[6] 3	[4] - (700)	[10] 3	[11] + 12	700
ص3= -4	3	[10] 2	[9] + (100)	[12] (100)	[4] - (500)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وبما أن أعلى رقم موجب هنا هو 12 فسوف نقوم باستخدام تلك الخانة بالبيع إلى ذلك السوق. أما تحديد الكمية فيتم بنفس الأسلوب السابق.

إجمالي الواردات 12(400)+13(100)+4(700)+ 9(100) +9(400)+4(500) = 14200

ع1=12 ع2=13 ع3 =16 ع4 =20

من \ إلى	1	2	3	4	العرض	
1	(12) - (400)	(13) + (100)	(4) 12-	(6) 14-	500	ص 1=0
2	(6) 3 +	(4) (200)	(10) 3	(11) 500	700	ص2 = -9
3	(10) 2	(9) + (600)	(12) (200)	(4) (12-)	800	ص3= -4
الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000	

إجمالي الواردات = 14200 + 12 (500) = 20200

ونلاحظ في المصفوفة أعلاه أنه يوجد لدينا خانات بنفس معيار تحسين الحل وهو30 وفي مثل هذه الحالة نختار أحدهما عشوائياً بعد التأكد من حجم اكمية التي سيتم نقلها وكذلك عدم ظهور مشاكل في الحل. فلو اخترنا مثلاً الخانة (ص2،ع3) فإن الكمية الواجب طرحها وإضافتها هي 200، وبما أنها متساوية في التخنتين الواجب الطرح منهما (ص2،ع2) و(ص3،ع3) فهذا يهني أن العدد الجديد للخانات سوف يصبح 5 بدلاً من 6. ويشكل هذا تجاوزاً للقاعدة المتعلقة بهذه النقطة، لذلك يفضل الابتعاد عنه ما دام أنه يوجد لدينا بديل وبنفس المعيار (ص2،ع1). وهنايستحسن الرجوع إلى مفهوم دورانية الحل الموضح في الصفحات السابقة.

طريقة أقل التكاليف (أعلى الأرباح) والطريقة المعدلة:

فبعكس طريقة أقل التكاليف، نقوم هنا باختيار أعلى الأرباح وننقل إليها الكميات اللازمة. ونجري هذه العملية تنازلياً حتى نفي باحتياجات جميع الأسواق. وبعد ذلك نقوم باختبار الحل فيما إذا كان نهائياً أم لا كما شرحنا سابقاً.

ع1=14   ع2=13   ع3= 16   ع4 =20

	من / إلى	1	2	3	4	العرض
ص1 =0	1	12 - 2-	13 + (500)	4 12-	6 14-	500
ص2 = -9	2	6 1	4 - (200)	10 + 3	11 500	700
ص3= -4	3	10 400	9 + (200)	12 -(200)	4 (12-)	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وبما أنه مـا زال بالإمكان تحسين الحل فيجب الاستمرار للوصول إلى الحل الأمثل بإتباع نفس الخطوات السابقة.

ع1=12   ع2=13   ع3= 16   ع4 =17

	من / إلى	1	2	3	4	العرض
ص1 =0	1	12 - (200)	13 + (300)	4 12-	6 11-	500
ص2 = -6	2	6 (200)	4 - 3-	10 + 0	11 (500)	700
ص3= -4	3	10 2	9 - (600)	12 (200)	4 9-	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

إجمالي الايرادات = 20200 + 3 (20) = 20800

ع1=14 ع2=13 ع 3= 16 ع4 =19

	من / إلى	1	2	3	4	العرض
ص 1=0	1	12 / 12-	+ 13 / (500)	4 / 12-	6 / 13-	500
ص2 = -8	2	6 / (200)	- 4 / 1-	+ 10 / 2	11 / (500)	700
ص3= -4	3	10 / + (200)	9 / (400)	12 / - (200)	4 / 11-	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

إجمالي الايرادات = 20800 + 2 (200) = 21200

وهنا تظهر لنا دورانية الحل مرة أخرى بحيث يصبح عدد الخانات المستعملة 5 خانات بدلا من 60 لذلك يجب إضافة خانة وهمية لاستكمال باقي خطوات الحل.

ع1=14 ع2=13 ع 3= 16 ع4 =17

	من / إلى	1	2	3	4	العرض
ص 1=0	1	12 / 2-	+ 13 / (500)	4 / 12-	6 / 11-	500
ص2 = -6	2	6 / 2-	- 4 / 3-	+ 10 / (200)	11 / (500)	700
ص3= -4	3	10 / (400)	9 / (400)	12 / (x)	4 / 9-	800
	الطلب	400	900	200	500	2000 / 2000

وبما أن جميع معايير تحسين الحل ≥ صفر، فيكون هذا هو الحل النهائي بإجمالي مردودات مقدارة 21600 ديناراً.

طريقة فوجل والطريقة المعدلة:

تعتمد هذه الطريقة أساساً على محاولة تخفيف الندم الناتج عن عدم اتخاذ القرار الأفضل. وبما أننا نتعامل هنا بايرادات فالقرار الأفضل أن نختار أعلى الأسعار في البداية ومن ثم نستمر في تحسين الحل. لذلك نأخذ أعلى الأسعار في الصفوف والأعمدة ونطرح منها القيم التي تليها. وتكون الأرقام الناتجة هي معايير الندم لهذه الصفوف والأعمدة. وبما أننا نريد تجنب أعلى ندم، فإننا نأخذ أعلى الأسعار في الصف أو العمود المتضمن لأعلى ندم ونضع في خانته الكمية المناسبة. ونكرر هذه العملية حتى ننهي عملية التوزيع هذه.

	من \ إلى	1	2	3	4	العرض			
		1=1 4	ع2= 13	ع 3= 16	ع4 = 17				
ص1=0	1	(12) 2-	(13) (500)	(4) 12-	(6) 11-	500	1	1	
ص2=-6	2	(6) 2-	(4) 3-	(10) (200)	(11) (500)	700	1	4	
ص 3= -4	3	(10) (400)	(9) (400)	(12) (x)	(4) 9-	800	2	2	2
الطلب		400	900	200	500	2000 / 2000			
		2	4	2	5				
		2	4	2					
		2							

ونلاحظ هنا أننا قد حصلنا على ٥خانات مستعملة فقد، لذلك نضيف خانة وهمية. وهذا الحل مطابق تماماً للنتائج التي توصلنا إليها عند استعمال الزاوية الشمالية الشرقية. لذلك نكون قد حصلنا على الحل النهائي أثناء الحل الأولي.

وإذا كنا قد ركزنا هنا على تطبيق الطريقة المعدلة كوسيلة وصول إلى الحل النهائي، فهذا لا يعني أننا لا نستطيع استخدام طريقة حجر التنقل. بل ويمكن استخدامها لمعالجة نفس الحالات.

5-1-6 النقل والبرمجة الخطية:

وبما أن طريقة النقل هي حالة من حالات البرمجة الخطية التي لا تستخدم لحل بعض المشاكل ضمن شروط وافتراضات معينة، فهذا يعني أن أي مسألة نقل يمكن حلها باستخدام أسلوب البرمجة الخطية الذي تم شرحه سابقاً.

وقبل عملية الحل هذه، فإنه لا بد من تحويل المسألة ووضعها في النموذج المناسب حتى يمكن حلها.

وفي هذا المجال لا بد من التمييز بين حالات العرض والطلب الثلاث المتعلقة بمشاكل النقل وهي:

(أ) تساوي العرض والطلب.

(ب) زيادة العرض على الطلب.

(جـ) زيادة الطلب على العرض.

وبقصد التوضيح نورد فيما يلي نموذجاً عاماً لمسألة النقل.

من \ إلى	1	2	3	4	العرض
ص1	ص1ع1	ص1ع2	ص1ع3	ص1ع4	ك1
ص2	ص2ع1	ص2ع2	ص2ع3	ص2ع4	ك2
ص3	ص3ع1	ص3ع2	ص3ع3	ص3ع4	ك1
ص4	ص4ع1	ص4ع2	ص4ع3	ص4ع4	ك1
	ك5	ك6	ك7	ك 8	=
					≥ ≤

ع= العمود

ص= الصف

ص ن ع ن= تكاليف أو ايرادات مثلاً (ص1ع1) تعني التكلفة أو الربح الموجود في تلك الخانة.

ك= كميات العرض والطلب: ك ص= كميات الصف ك ع = كمية العمود

-

(≥) تساوي أو عدم تساوي كميات العرض والطلب.

≤

وبذلك يكون النموذج العام كما يلي:

خفض أو عظم

$\sum_{1}^{ن}$ ص ن ع ن

علماً بأن $\sum_{1}^{ن}$ ع ن (≥) ك ص ن

=

$\sum_{1}^{ن}$ ع ن (≥) ك ص ن

≤

(أ) حالة تساوي العرض والطلب

وهنا تكون جميع إشارات القيود متساوية (=)

مثال

	ع 1	ع2	ع3	العرض
ص1	3	4	2	50
ص2	1	6	5	110
ص3	1	6	5	90
الطلب	100	80	70	2000 / 2000

وبما أن كميات العرض والطلب متساوية هنا فإن صياغة هذا المثال على شكل مسألة برمجة خطية تكون بالشكل التالي على افتراض أن الأرقام المعطاة هي تكاليف.

خفض 3 ص1ع1+4 ص1ع2+2 ص1ع2+ ص2ع2+6 ص2ع2+5 ص2ع3+ 3ع1+ 4 ص3 ع2 +7 ص+ع3

علماً بأن:

ص1ع1 + ص1ع2 + ص1ع3 = 50

ص2ع1 + ص2ع2 + ص2ع3 = 110   الصفوف

ص3ع1 + ص3ع2 + ص3ع3 = 90

ص1ع1 + ص2ع1 + ص3ع1 = 100

ص1ع2 + ص2ع2 + ص3ع2 = 80   الأعمدة

ص1 ع 3 + ص2ع3 + ص3ع3 = 70

(ب) حالة زيادة العرض على الطلب

وهنا نضع إشارة (=) للقيود الممثلة للأعمدة ونضع إشارة (≥) للقيود الممثلة للصفوف، لذلك تظهر القيود الثلاثة الأولى كما يلي:

ص1ع1 + ص1ع2 + ص1ع3 ≥ 50

ص2ع1 + ص2ع2 + ص2ع3 ≥ 110

ص3 ع 1 + ص3ع2 + ص3ع3 ≥ 90

=   =   =

100   80   70

بينما تبقي القيود الأخيرة بدون تغيير.

(جـ) حالة زيادة الطلب على العرض

وبعكس ما سبق فإننا نضع إشارة (≥) للقيود الممثلة للأعمدة وإشارة (=) للقيود الممثلة للصفوف.

ص1ع1 + ص2ع1 + ص3ع1 ≤ 100

ص1ع2 + ص2ع2 + ص3ع2 ≤ 80

ص1 ع 3 + ص2ع3 + ص3ع3 ≤ 70

≤ ≤ ≤

90 110 50

وبما أنه يصعب حل مثل هذه المسائل يدوياً، فإنه يفضل الاستعانة بالحاسب الآلي.

2-6 طريقة التعيين Assignment

إن هذه الطريقة تمثل أيضاً حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية. ولا تختلف استخداماتها كثيراً عن طريقة النقل. حيث أنها يمكن أن تستخدم في القرارات المتعلقة بتوزيع الوظائف على الأفراد أو الآلات والنقل والتوزيع وكذلك اختيار مواقع للمشروعات المختلفة. إلا أن أهم ما يميز هذه الطريقة هو أن جميع جوانب العرض والطلب بها هي (1). وهذا يعني أن التعيينات تتم على أساس واحد إلى واحد. أي وظيفة لكل شخص مثلاً حيث لا يمكن أن يقوم الشخص بأكثر من وظيفة وكذلك لا يقوم شخصان بوظيفة واحدة.

كما في طريقة النقل فهي تستعمل في حالات تخفيض التكاليف أو زيادة الأرباح.

6-2-1 طرق حل مشاكل التعيين:

من أهم الطرق التي يمكن استخدامها لحل مشاكل التعيين هي:

(1) طريقة العد الكامل Complete enumeration

(2) الطريقة الهنغارية The Hungarian Method

(3) طريقة النقل Transportation

(4) البرمجة الخطية Linear Programming

(1) طريقة العد الكامل:

وتعتمد هذه الطريقة على تحديد عدد المرات التي يمكن بها التوفيق بين البدائل المختلفة. فإذا كان لدينا 3 أشخاص و3 وظائف فإن عدد مرات المقارنة اللازمة لعملية الاختيار هي مضروب (!) العدد 3 أي (!3)= 3×2×1=6

وهنا يعتمد في أساسه على الافتراض بأن مصفوفة التعيين يجب أن تكون متوازنة Balancedأي أن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة. وغالباً ما تصلح هذه الطريقة للمصفوفات صغيرة الحجم إذا كنا نريد حلها يدوياً. فلو ارتفعت المصفوفة إلى 4×4 مثلاً فهذا يعني أننا نحتاج إلى 24 مقارنة (4!).

مثال1 : لو كانت لدينا المعطيات التالية عن تكاليف إنجاز ثلاثة وظائف على ثلاثة آلات. والمطلوب استخدام العد وإجراء عملية التعيين لتخفيض إجمالي التكاليف.

آلة / وظيفة	د	هـ	و
أ	21	17	31
ب	17	19	35
جـ	20	21	27

الحل : عدد المقارنات اللازمة هي (3!) =6

وهي كما يلي

(1): أ د،ب هـ، ح و

(2): أ د، ب و، ج هـ

(3): ب د، أ و، ج هـ

(4): ب د، أ هـ، ب و

(5): ج د، أ و، ب و

(6): ج ح، أ و، ب هـ

وبعد هذه الخطوة نحسب تكاليف كل بديل اعتماداً على الأرقام المعطاة. ممثلاً تكلفة إنجاز الوظيفة (أ) على الأدلة د) هي 21 وهذا يعني أن أد=21 وتطبيقاً لذلك فإن التكاليف تكون كما يلي:

$67 = 27 + 19 + 21 = 1$

$77 = 21 + 35 + 21 = 2$

$\boxed{61} = 27 + 17 + 17 = 3$

$69 = 21 + 31 + 17 = 4$

$72 = 35 + 17 + 20 = 5$

$70 = 19 + 31 + 20 = 6$

وهنا نختار أقل التكاليف وهي ممثلة بالرقم 61 أمام البديل الثالث. وهذا يعني أننا ننجز الوظيفة أ على الأدلة هـ، والوظيفة ب على الأدلة د وأخيراً الوظيفة ج على الأدلة و0

(2) **الطريقة الهنغارية:**

وتتميز هذه اطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل النهائي وهذه الخطوات هي:

1- عملية طرح الصفوف. وذلك بأن نأخذ أقل رقم (في حالة التكاليف) في كل صف ونطرحه من باقي القيم في ذلك الصف.

2- عملية طرح الأعمدة. وذلك بأن نأخذأقل رقم في كل عمود في المصفوفة الناتجة عن الخطوة الأولى ثم نطرحه من كافة القيم في ذلك العمود.

3- تغطية الأصفار في المصفوفة الأخيرة بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية أو العمودية.

4- إذا كان عدد الخطوط المغطية للأصفار يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة فإننا نقوم بعملية التعيين وذلك بأن نأخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على اساس واحد لواحد والقصد من أخذ الأصفار في هذه الحالة هو لأنها تمثل أصلاً أقل التكاليف.

5- إذا كان عدد الخطوط المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فهذا يعني أننا لا نستطيع القيام بكافة التعيينات. ومن أجل الاستمرار بالحل فإننا نأخذ أقل قيمة غير مغطاة ونطرحها من كافة القيم غير المغطاة وبنفس الوقت نضيفها إلى نقاط تقاطع الخطوط التي قمنا بوضعها لتغطية الأصفار. وهنا قد يتبادر لنا سؤال عن الوضع المفضل لرسم الخطوط فيما إذا كان أفقياً أو عمودياً، والواقع أن كيفية رسم الخطوط لا تؤثر على النتائج النهائية ما دمنا متأكدين من دقتنا في تحديد عددها.

وقد نحصل على أكثر من حل إلا أنها جميعاً يجب أن نؤدي إلى نفس النتيجة.

6- الاستمرار في تطبيق الخطوتين (3 و5) حتى ننهي الحل.

الحل باستعمال الطريقة الهنغارية:

(1) طرح الصفوف

الصف الأول وأقل رقم	=17	4	0	14
الصف الثاني وأقل رقم	=17	0	2	18
الصف الثالث وأقل رقم	=20	0	1	7

(2) طرح الأعمدة

العمود الأول وأقل رقم=0	العمود الثاني وأقل رقم=0	العمود الثالث وأقل رقم=7
4	0	7
0	2	11
0	1	0

تغطية الأصفار بأقل عدد ممكن من الخطوط

	د	هـ	و
أ	4	0	7
ب	0	2	11
ج	0	1	0

ونلاحظ هنا أننا قد حصلنا على ثلاثة خطوط حيث لا يمكن تغطية الأصفار بأقل من هذا العدد.

وعند هذه النقطة نقوم بإجراء التعيينات معتمدين على القيم الصفرية. وتسهيلاً لهذه العملية نحاول البدء بالصفوف المحتوية على صفر واحد ونجري لها التعيينات اللازمة. وبما أن الصف الأول يحتوي على صفر واحد وهو نقطة أ هـ فإننا ننجز الوظيفة أ على الآلة هـ. وبعدها نستثني أ هـ من حساباتنا. الصف 2 على صفر واحد عند النقطة ب د، لذلك ننجز ب على د. والآن تبقى أمام الوظيفة ج، الآلة و فقط ونقوم بإنجازها عليها.

وتتلخص نتائج التعيين هذه كما يلي:

الوظيفة	الآلة	التكاليف الأصلية
أ	هـ	17
ب	د	17
ج	و	27
		61

61 وهو نفس الجواب السابق

ونورد هنا مثالاً إضافياً لتوضيح الخطوة الخامسة من خطوات هذه الطريقة.

	1	2	3	4
أ	24	10	21	11
ب	14	22	10	15
جـ	15	17	20	19
د	11	19	14	13

(1) طرح الصفوف

14	0	11	1
4	12	0	5
0	2	5	4
0	8	3	2

(2) طرح الأعمدة

14	0	11	0
4	12	0	4
0	2	5	3
0	8	3	1

ونلاخظ هنا أننا استطعنا تغطية الأصفار بثلاثة خطوط فقط. في حين أننا نحتاج إلى أربعة خطوط لإجراء عملية التعيين. لذلك فلا بد لنا من تطبيق الخطوة الخامسة والتي تبدأ بتحديد أقل قيمة غير مغطاة وهي هنا (1) وطرحها من كافى القيم غير المغطاة.

4 12

3 2

1 8

أضفنا إلى نقاط التقاطع حيث توجد القيمتان 14و11.

وبعد تطبيق ذلك تتخذ المصفوفة الشكل التالي والذي نطبق عليه الخطوة الثالثة مرة أخرى

	1	2	3	4
أ	15	0	12	0
ب	4	11	0	3
جـ	0	1	5	3
د	0	7	3	0

وبما أننا لم نستطيع تغطية الأصفار بأقل من أربعة خطوط فهذا يعني نهاية الحل.

أما نتائج عملية التعيين فهي كما يلي:

		التكاليف
أ	2	10
ب	3	10
جـ	1	15
د	4	13
		48

(3) **طريقة النقل:**

نتبع هنا نفس خطوات طريقة النقل ما عدا أن كميات العرض والطلب جميعها تكون من الرقم (1). وفي حالة عدم تساوي الصفوف والأعمدة، فإننا نضيف صفاً أو عموداً وهمياً حسب الحاجة. وتكون تكاليفه أو أرباحه أصفاراً وكمية العرض أو الطلب به (1). وبعدها نقوم بالحل كما سبق ووفق قواعد طريقة النقل.

مثال 3: لو افترضنا أننا نريد حل مثال (2) باستخدام طريقة النقل، فالخطوة الأولى هي وضع المصفوفة على شكل مصفوفة نقل مع توضيح كميات العرض والطلب وذلك كما يلي:

من \ إلى	1	2	3	4	العرض
أ	24	10	21	11	1
ب	14	22	10	15	1
جـ	15	17	20	19	1
د	11	19	14	13	1
الطلب	1	1	1	1	1

الحل بأقل التكاليف والطريقة المعدلة:

	من \ إلى	1	2	3	4	العرض
0	أ	24 / (20)	10 / 1	21 / 16	11 / (x)	1
5	ب	14 / (x)	22 / 7	10 / (1)	15 / 1-	1
8	جـ	15 / + 2-	17 / 1-	20 / 7	19 / (1-)	1
2	د	11 / (1) -	19 / 7	14 / 7	13 / (x) +	1
	الطلب	1	1	1	1	

بما أن عدد الخانات المستعملة يجب أن يساوي 7، فقد أضفنا هنا ثلاث خانات وهمية.

وبعد الاستمرار بالحل سوف نجد أننا نحصل على نفس الإجابة السابقة.

(4) الحل بالبرمجة الخطية:

تعامل مسألة التعيين نفس معاملة طريقة النقل. والفارق الوحيد كما سبق ذكره هو أن كميات العرض والطلب جميعها تأخذ القيمة (1). وبما أنه يفضل تحويل مصفوفة النقل إلى مصفوفة متوازنة قبل حلها فسوف لا نواجه مشكلة الفرق بين الكميات المعروضة والكميات المطلوبة.

وفيما يلي صياغة مسألة التعيين موضوع البحث على شكل مسألة برمجية خطية.

خفض

24أ1 + 10أ2 + 21أ3 + 11أ 4 + 14ب1 + 22ب2 + 10 ب3 + 15ب4 + 15جـ + 15

جـ1 + 17جـ 2 + 20جـ2 + 19جـ 4 + 11د1 + 19د2 + 14د3 + 13د4

علماً بأن

العرض

أ1 + أ2 + أ3 + أ4 = 1

ب1 + ب2 + ب3 + ب4 = 1

جـ1 + جـ2 + جـ3 + جـ4 = 1

د1 + د2 + د3 + د4 = 1

الطلب

أ1 + ب1 + جـ1 + د1 = 1

أ2 + ب2 + جـ2 + د2 = 1

أ3 + ب3 + جـ3 + د3 = 1

أ4 + ب4 + جـ4 + د4 = 1

6-2-2 طريقة التعيين وزيادة الأرباح:

سبق وذكرنا بأن طريقة التعيين يمكن أن تستخدم في حل مشاكل تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح.

وبما أننا قد القينا الضوء على الجزء الأول فسوف نتطرق الآن إلى الجزء الثاني، أي تعظيم الأرباح.

والطريقة المفضلة هنا هي تحويل مصفوفة الربح إلى مصفوفة تكاليف أو مصفوفة ندم. ويتم ذلك عن طريق طرح جميع أرقام المصفوفة من أعلى رقم بها. وتمثل المصفوفة الجديدة مقادير الندم الناتجة عن عدم اختيار أعلى ربح. وبعدها نستمر بالحل. وبأي من الأساليب المفصلة سابقاً. وإذا كنا نريد الإسراع في الحل، فإننا نحول مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة ندم عن طريق تحديد أعلى رقم في كل عمود ومن ثم نطرح كافة القيم في كل عمود من أعلى قيمة فيه. وبعدها نستمر بباقي خطوات الحل وكالمعتاد.

فلو افترضنا أن الأرقام المعطاة في مثال (2) هي أرباح، فإن مصفوفة الندم الناتجة عنها بعد طرح جميع الأرقام من أعلى رقم هو(24). هي الآتية:

	1	2	3	4
أ	0	14	3	13
ب	10	2	14	9
جـ	9	7	4	5
د	13	5	10	11

وتجدر الإشارة هنا إلى أننا لا نقوم بعملية التحويل هـه إذا أردنا حل المسألة بطريقة البرمجة الخطية. وفي هذه الحالة نبقي الأرقام كما هي ونبني دالة الهدف على أساس تعظيم الأرباح وليس تخفيض التكاليف.

3-2-6 محددات على طريقة التعيين Limitation of the Assignment Method

هناك بعض المحددات على استهدام هذه الطريقة:

1- لا بد من عمل بعض التسويات إذا كانت عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة.

2- لا تاخذ هذه الطريقة بعين الاعتبار الوظائف الجديدة التي قد تصل وبشكل مستمر وما يترتب على ذلك من قرارات تعيين، ذلك أن هذه الطريقة هي طريقة ثابتة Static Approach

فلو افترضنا أن أحد متاجر الأقسام يرغب في تخزين بضائعه في مخازن واقعة في مناطق مختلفة بحيث ينتج عن ذلك مردودات مختلفة. ويبين الجدول التالي طبيعة هذه المشكلة.

جدول(1)

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	
الأحذية	10	6	12	8	
الألعاب	15	18	5	11	
قطع غيار السيارات	17	10	13	16	
الأدوات المنزلية	14	12	13	10	
الأدوات الكهربائية	14	16	6	12	

الخطوى الأولى لحل هذه امشكلة هي تحويلها إلى مشكلة متوازنة وذلك من خلال إضافة مخزن خامس وهمي كما يوضح الجدول رقم (2).

جدول (2)

المشكلة بعد إضافة المخزن الوهمي

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	5
الأحذية	10	6	12	8	0
الألعاب	15	18	5	11	0
قطع غيار السيارات	17	10	13	16	0
الأدوات المنزلية	14	12	13	10	0
الأدوات الكهربائية	14	16	6	12	0

لحل هذه المشكلة لا بد من تحويلها كما أسلفنا إلى مشكلة تقليل تكاليف وسنوم بذلك من خلال تحديد أكبر رقم في الجدول وطرح كافة الأرقام من هذا الرقم ووضع النتائج الجديدة والتي تمثل كلفة الفرصة المضاعفة وكما يوضح الجدول رقم (3).

جدول (3)

جدول كلفة الفرصة المضاعفة

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	
الأحذية	8	12	6	10	18
الألعاب	3	0	13	11	18
قطع غيار السيارات	1	8	5	2	18
الأدوات المنزلية	4	6	5	8	18
الأدوات الكهربائية	4	2	12	6	18

وبعد ذلك نتبع الخطوات المصاحبة لمشكلة الكلفة ولحين الوصول للحل الأمثل. وكما توضح الجداول الآتية:

جدول (4)

تخفيض الصفوف

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	
الأحذية	2	6	0	14	12
الألعاب	2	0	13	7	18
قطع الغيار	0	7	4	1	17
الأدوات المنزلية	0	2	1	4	14
الأدوات الكهربائية	2	0	10	1	16

جدول (5)

تخفيض الأعمدة

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	
الأحذية	2	6	0	3	0
الألعاب	3	0	13	6	6
قطع الغيار	0	7	4	0	5
الأدوات المنزلية	0	2	1	3	2
الأدوات الكهربائية	2	0	10	3	4

جدول رقم (6)

نغطية القيم الصفرية بأقل عدد ممكن من الخطوط

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	5
الأحذية	2	6	0	3	0
الألعاب	3	0	13	6	6
قطع الغيار	0	7	4	0	5
الأدوات المنزلية	0	2	1	3	2
الأدوات الكهربائية	2	0	10	3	4

عدد خطوط التغطية = 4 ≠ عدد الصفوف

وهذا يعني أنه لا يمكن إجراء التعيينات، ولا بد من الاستمرار من أجل الوصول إلى الحل الأمثل.

جدول رقم (7)

النتيجة بعد طرح أصفر رقم غير مغطى من الأرقام غير المغطاة وإضافته للقيم الموجودة على نقاط تقاطع خطوط التغطية.

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	
الأحذية	3	7	0	3	0
الألعاب	3	0	13	5	5
قطع الغيار	1	8	4	0	5
الأدوات المنزلية	0	2	0	2	1
الأدوات الكهربائية	2	0	9	2	3

عدد خطوط التغطية = 4 ≠عدد الصفوف. وهذا لا بد من الاستمرار كما في الخطوة السابقة

جدول رقم (8)

الاستمرار في الحل باستخدام جدول (7)

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	
الأحذية	3	9	0	3	0
الألعاب	1	0	10	3	3
قطع الغيار	1	10	4	0	5
الأدوات المنزلية	0	4	0	2	1
الأدوات الكهربائية	0	0	7	0	1

عدد الصفوف = عدد الأعمدة =5

وهذا يعني أنه يمكن إجراء التعيينات اللازمة.

جدول رقم (9) التعيين الأمثل

الدائرة	المخزن	الربح
الأحذية	5	0
الألعاب	2	18
قطع الغيار	4	16
الأدوات المنزلية	3	13
الأدوات الكهربائية	1	12
المجموع		61

افترض أن المدير في المثال الأخير يعتقد أن دائرة الألعاب يجب أن لا توضع في المخزن رقم (2) أي أن المدير ونتيجة الأخذ بعين الاعتبار ببعض الأمور كالمساحة المتاحة، والمخازن المجاورة.... فإن التعينن الذي توصلنا له في الحل السابق غير مقبول. وعلى هذا لا بد من إعادة الحل بناء على المعلومات المستجدة.

ومن معلوماتك المتعلقة بالبرمجة الخطية ولا سيما الموضوع المتعلق بالعوامل الاصطناعية، حيث حاولنا ضمان عدم بقاء هذه العوامل في الحل وبالتالي إخراجها من الحل قبل الوصول للحل الأمثل وذلك بإعطاء هذه العوامل كلفة عالية جداً في حالة مشكلة تقليل التكاليف وربحية منخفضة جداً في حالة تعظيم الأرباح. وباستخدام نفس المدخل لمشكلة التعيين فإننا نضع القيمة (+م) للتعيين غير المقبول لمشكلة تقليل التكاليف، والقيمة (-م) للتعيين غير المقبول لمشكلة تعظيم الأرباح. حيث يمثل الحرف (م) قيمة عالية جداً.

وتمثل الجداول اللآتية خطوات الحل المصاحب لهذه الثيود

جدول رقم (10)

التقييدات على التعيين من خلال وضع قيمة (-م) في المربعات الممنوع التعيين فيها.

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	5
الأحذية	10	6	12	8	0
الألعاب	15	-م	5	11	0
قطع الغيار	17	10	13	-م	0
الأدوات المنزلية	14	12	13	10	0
الأدوات الكهربائية	14	16	6	12	0

جدول رقم (11)

كلفة الفرصة المضاعفة والتي هي نتيجة طرح كل الأرقام في كل عمود من الرقم الأكبر في العمود

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	5
الأحذية	7	10	1	4	4
الألعاب	2	16+م	8	1	0
قطع الغيار	0	6	0	12 +م	0
الأدوات المنزلية	3	4	0	2	0
الأدوات الكهربائية	3	0	7	0	0

بعد هذه الخطوة نقوم بتغطية القيم الصفرية، وبذلك لأن كل صف يوجد فيه قيمة صفرية وكذلك كل عمود

جدول رقم (12)

تغطية القيم الصفرية

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	5
الأحذية	7	10	1	4	4
الألعاب	2	16+م	8	1	0
قطع الغيار	0	6	0	12+م	0
الأدوات المنزلية	3	4	0	2	0
الأدوات الكهربائية	3	0	7	0	0

عدد الخطوط = 4 ≠ عدد الصفوف، إذن لا بد من استخدام الخطوة الرابعة والجدول رقم (4) يبين نتائج استخدام هذه الخطوة.

جدول رقم (13)

النتائج بعد استخدام الخطزة الرابعة مع خطوة التغطية

الدائرة	المخازن				
	1	2	3	4	5
الأحذية	6	9	0	3	0
الألعاب	1	15+م	7	0	0
قطع الغيار	0	6	6	12+م	1
الأدوات المنزلية	3	4	0	2	1
الأدوات الكهربائية	3	0	7	0	1

عدد الخطوط =عدد الصفوف، إذا يمكن إجراء التعيين الأمثل.

جدول رقم (14)

التعيين الأمثل

الدائرة	المخزن	الربح المصاحب
الأحذية	الرابع	13
الألعاب	الأول	17
قطع الغيار	الثالث	11
الأدوات المنزلية	الثاني	16
الأدوات الكهربائية	الخامس	0
المجموع		57

الأسئلة:

1- ما هي أهم استخدامات طريقة النقل؟

2- ما هي طبيعة العلاقة بين طريقة النقل والبرمجة الخطية بشكل عام؟

3- ما هي أهم طرق الحل الأولي لطريقة النقل وما طبيعة الفروق فيما بينهما؟

4- ما هي أهم طرق الحل النهائي لمشاكل النقل وما طبيعة العلاقة بينهما؟

5- ما هي أهم الحالات الخاصة التي يمكن مواجهتها عند حل مشاكل النقل؟

6- ما المقصود بدورانية الحل في مشاكل النقل؟

7- ما هي أهم استخدامات طريقة التعيين؟

8- ما هي أوجه التشابه والاختلاف بين طريقتي النقل والتعيين؟

9- ما هي الحالات الخاصة التي يمكن مواجهتها في مشاكل التعيين؟

10- ما هي طبيعة العلاقة بين طريقة التعيين والبرمج الخطية بشكل عام؟

تمارين:

1- مستخدماً مصفوفة النقل التالية:

(1) أوجد الحل الأولي مستخدماً:

(أ) طريقة الزاوية الشمالية الشرقية.

(ب) طريقة أقل التكاليف.

(جـ) طريقة فوجل

2- قارن بين النتائج السابقة وأيها تعتقد أفضل

من \ إلى	1	2	3	العرض
1	10	8	4	45-
2	9	5	7	50
3	3	6	9	45
4	5	7	6	30
الطلب	1	1	1	

2- مستخدماً المصفوفة السابقة ومبتدئاً بنتائج الحل بواسطة الزاوية الشمالية الشرقية.

(1) أوجد الحل النهائي باستخدام:

أ- الطريقة المعدلة.

ب- طريقة حجر التنقل.

(2) قارن بين نتائج الحل بالطريقتين السابقتين

(3) هل هناك تكلفة إضافية فيما لو كان من الضروري نقل 10 وحدات من (3) إلى (1) حسب نتائج طريقة حجر التنقل.

(4) ما هو التغير في تكاليف الناتج عن وجوب نقل 30 وحدة من (1) إلى (1) حسب نتائج الطريقة المعدلة.

(5) ما هو التغير الناتج في التكاليف النهائية إذا كنا لا نستطيع النقل من (2) إلى (2).

3- استخدم طريقتي الزاوية الشمالية وحجر التنقل لحل مسألة الربح التالية وما هو مقدار الربح الإجمالي؟

إلى / من	1	2	3	العرض
1	5	4	10	400
2	4	9	6	300
3	8	3	2	200
طلب	150	500	250	

4- استخدم طريقتي فوجل والمعدلة لحل مسألة الربح التالية وأوجد إجمالي الربح النهائي.

إلى / من	1	2	3	العرض
1	10	7	5	400
2	6	9	4	300
3	2	3	8	200
طلب	150	500	250	

5- لو تغيرت كمية الطلب في العمود الثالث من التمرين الثالث لتصبح 300 بدلا من 250 فما هو الحل الجديد موضحاً خطواته

6- لو تغيرت كمية العرض في الصف الثاني من التمرين الرابع لتصبح 400 بدلا من 300 فما هو الحل الجديد موضحاً خطواته.

7- استخدم طريقة الزاوية الشمالية وكلاً من حجر التنقل والطريقة المعدلة لحل المسألة التالية:

من \ إلى	1	2	العرض
1	7	5	200
2	4	8	100
3	5	6	300
طلب	200	300	600 / 500

8- تقوم إحدى الشركات الصناعية بإنتاج أحد منتجاتها في ثلاثة مواقع وتقوم بتوزيعها على أربعة أسواق، هذا علماً بأن تكلفة إنتاج الوحدة تختلف من موقع لآخر نتيجة اختلاف ظروف العمل. وبناءً على المعلومات التالية ماذا تنصح هذه الشركة بالعمل لتخفيض إجمالي تكاليف النقل والتخزين مستخدماً ما تختار من أساليب طريقة النقل.

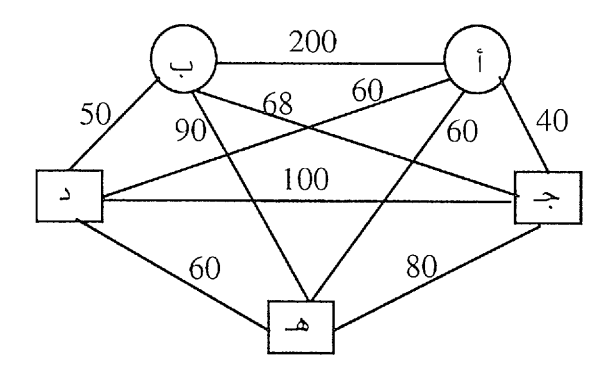
السوق	الطلب بالوحدة
1	300
2	500
3	400

الموقع	تكلفة الوحدة	الطاقة الانتاجية
1	17	800
2	20	600
3	24	700

9- إذا ارتفع الطلب في العمود الأول من المثال المشروح بالكتاب ليصبح 500 بدلا من 400. وضح خطوات الحل بعد إجراء التغيير ومستخدماً الطريقة التي تختار.

10- ضع نموذج البرمجة الخطية المناسب لكل من المصفوفات في التمارين (1، 3، 4، 7، 8، 9)

11- يوجد لأحد الشركات موقعان صناعيان هما (أوب) بطاقة إنتاجية يومية مقدارها (400, 600) للموقعين على التوالي. كما يوجد لهذه الشركة ثلاثة مستودعات هي (جـ، د، هـ) بطلب يومي مقداره (500, 300, 200) لهذه المستودعات بالتسلسل. وتتناسب تكاليف النقل مع المسافات الموضحة بالشكل التالي، هذا علماً بأنه لا يجوز النقل بين المصانع ببعضها أو المستودعات ببعضها.



المطلوب:

(أ) ضع هذه المسألة على شكل مصفوفة نقل.

(ب) أوجد الحل الأمثل مستخدماً أقل التكاليف للحل الأولي.

12- فيما يلي الأوقات اللازمة لإنجاز الوظائف (أ،ب،ج) على الآلات (د،هـ،ز) المطلوب هو توزيع الوظائف على الآلات بشكل يخفض وقت الإنجاز، مستعيناً بالطريقة الهنغارية.

آلة / وظيفة	د	هـ	و	ز
أ	7	6	5	8
ب	8	5	6	7
جـ	10	7	6	6

13- وزع المهام (أ،ب،ج) على الأشخاص (د، هـ، و) لتخفيض تكاليف العمل مستخدماً طريقة العد

أشخاص / مهام	د	هـ	و
أ	4	5	6
ب	7	3	5
جـ	2	7	6

14- فيما يلي عدد الأخطاء التي يعملها خمسة من العمال أثناء العمل على خمس آلات. والمطلوب هو توزيع العمال على الآلات بشكل يقلل من عدد الأخطاء

عمال / آلات	أ	ب	جـ	د	هـ
1	4	5	6	9	3
2	8	5	2	6	7
3	10	6	8	10	8
4	4	6	7	5	9
5	7	6	5	11	5

15- فيما يلي أسعار بيع أصناف من الإنتاج في أربع مناطق والمطلوب هو توزيع المنتجات على المناطق بشكل يزيد من إجمالي المردودات علماً بأن هذه المنتجات متجانسة ولا نستطيع أن نبيع أكثر من صنف واحد في منطقة.

المنتجات / المناطق	أ	ب	جـ	د
1	5	7	8	6
2	3	4	2	2
3	4	5	7	5
4	7	6	4	3

16- توزيع إحدى الشركات إنتاجها في ثلاثة أسواق وبالأسعار التالية

السوق	سعر بيع الوحدة
أ	10
ب	12
ج	15

ويوجد لدى هذه الشركة أربعة من رجال البيع. ويمثل الجدول التالي احتمالات البيع في كل منطقة من قبل رجال البيع والمطلوب هو توزيع رجال البيع على المناطق بشكل يزيد من قيمة المبيعات.

رجال البيع \ الأسواق	أ	ب	جـ
1	0.7	0.5	0.4
2	0.5	0.6	0.7
3	0.7	0.4	0.6
4	0.8	0.5	0.4

17- حل المسألة التالية مستخدماً طريقة التعيين.

أشخاص \ وظائف	أ	ب	جـ	د	هـ
1	16	25	20	23	22
2	17	26	24	19	21
3	22	13		21	18
4	19	21	23	22	

18- افترض أن المسألة السابقة هي مسألة نقل، اعمل التعديلات اللازمة وحلها مبتدئاً بطريقة فوجل.

19- أعد صياغة مسألة النقل المفترضة في التمرين السابق على شكل مسألة برمجة خطية.

20- أعد صياغة المسائل في التمارسن (16,17) على شكل مسائب برمجة خطية

21- استخدم الحاسوب في حل ما تراه مناسباً من المسائل السابقة.

22- لدى إحدى الشركات ثلاثة مصانع وتتعامل مع أربعة أسواق وقد علمت بأن المصانع الثلاثة تستطيع إنتاج ما مقداره 5000 وحدة، و6000 وحدة و 2500 وحدة وعلى التوالي في حين أن احتياجات الأسواق الأربعة كانت 6000 وحدة و400 وحدة و2000 وحدة و1500 وحدة وعلى التوالي، أما كلفة إرسال الوحدة الواحدة من المصنع الأول وللآسواق الأربعة فقد كانت 3دينار ،2دينار،7دينار،6 دينار وعلى التوالي، كلفة إرسال وحدة واحدة

من المصنع الثاني للأسواق الأربعة كانت 7 ,5 ,2 ,3 دنانير وعلى التوالي، وأخيراً فإن تكلفة إرسال وحدو واحدة من المصنع الثالث للأسواق الأربعة كانت 2 ,5 ,4 ,5على التوالي.

المطلوب استخدام كافة الطرق المتاحة لإيجاد الحل الأولي وكذلك استخدام طريقتي حجر التنقل والتوزيع المعدلة لإيجاد الحل الأمثل.

23- لقد أعطيت المعلومات التي يتضمنها الجدول الأتي:

	الأسواق			
المصادر	د	هـ	و	الغرض
أ	2	5	3	40
ب	1	4	2	30
جـ	4	3	2	30
الطلب	20	30	50	100

المطلوب:

1- إيجاد الحل الأولي باستخدام قاعدة الزاوية الشمالية الشرقية وما هي الكلفة المصاحبة لهذا الحل.

2- إيجاد الحل الأمثل باستخدام طريقة حجر التنقل.

3- ما هي الكلفة المصاحبة للحل الأمثل؟

4- هل هناك أكثر من حل أمثل ؟ وما هو مع التوضيح.

24- يتوفر لدى إحدى الدوائر أربعة رجال لتنفيذ ثلاثة (3) مشاريع والجدول الآتي يبين الساعات المطلوبة من كل رجل لإتمام العمل على كل مشروع.

المشروع

الرجل	س	ص	ع
أ	10	13	8
ب	14	17	10
ج	16	20	13
د	12	14	8

المطلوب:

مساعدة مدير هذه الدائرة في ايجاد التعيين الأمثل والذي سيؤدي إلى تقليل الوقت اللازم لتنفيذ هذه المشاريع.

25- إحدى الدوائر عليها إنجاز أربعة وظائف ولديها أربعة مكائن وقد قدرت الوقت اللازم لتنفيذ وظيفة معينة من قبل ماكنة معينة كما هو مبين في الجدول الآتي

الماكنة / الوظيفة	1	2	3	4
أ	5	6	8	7
ب	10	12	11	7
جـ	10	8	10	6
د	8	7	4	3

المطلوب:

مساعدة إطارة هذه الدائرة في تعيين هذه الوظائف على المكائن وبذلك الشكل الذي سيؤدي إلى تقليل الوقت اللازم لتنفيذها.

تطبيقات في البرمجة

To / From	A	B	C	D	Supply
X	12	13	4	6	500
Y	6	4	10	11	700
Z	10	9	12	4	800
Demand	400	900	200	500	2000 / 2000

Given this cost minimization problem.

a) Solve using the transportation method.

b) Change the supply of A to 600

c) Change the demand og A to 600 and solve.

d) Solve for all the previous cases using the simplex method of LP.

Case (a):

Objective function:

Minimize:

12XA+13XB+4XC+6XD+6YA+4YB+10YC+11YD+10ZA+9ZB+12+ZC+ 4ZD

Subject to;

Supply Constraints:

XA+XB+XC+XD=500

YA+YB+YC+YD=900

ZA+ZB+ZC+ZD=800

Demand Constraints:

XA+YA+ZA =400

XB+YB+ZB =900

XC+YC+ZC =200

XD+YD+ZD =500

Case (b): Supply > Demand.

In this case the only change only change we introduce is to change the supply constraint to ≤ the rest of the problem remains as it is.

Supply Constraints:

XA+XB+XC+XD ≤ 500

YA+YB+YC+YD ≤ 900

ZA+ZB+ZC+ZD ≤ 800

(c): Supply < Demand Case

Here we change only the Demand Constraint to Demand Constraints:

XA+YA+ZA ≤ 400

XB+YB+ZB ≤ 900

XC+YC+ZC ≤ 200

XD+YD+ZD ≤ 500

	1	2	3	4
A	24	10	21	11
B	14	22	10	15
C	15	17	20	19
D	11	19	14	13

A) Solve as a cost minimization problem using the assignment method.

B) Solve s a cost minimization using simplex method of LP. Formulation.

Objective func

Minimize:

$24A_1 + 10A_2 + 21A_3 + 11A_4 + 14B_1 + 22B_2 + 10B_3 + 15B_4 + 15C_1 + 17C_2 +$
$20C_3 + 19C_4 + 11D_1 + 19D_2 + 14D_3 + 13D_4$

Subject to:

Rows:

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1$

$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 1$

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1$

$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1$

Columns:

$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 1$

$A_2 + B_2 + C_2 + D_2 = 1$

$A_3 + B_3 + C_3 + D_3 = 1$

$A_4 + B_4 + C_4 + D_4 = 1$

$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 1$

```
*********************************
**                             **
**   TRANSPORTATION MODEL      **
**                             **
*********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

(1) TYPE OF PROBLEM = MINIMIZATION

(2) NUMBER OF ROWS (SOURCES) =3

(3) NUMBER OF COLUMNS (DESTINATION) =4

(4) TABLEAU VALUES:

	1	2	3	4	SUPPLY
1	12	13	4	6	500
2	6	4	10	11	700
3	10	9	12	4	800
	400	900	200	500	

ND

OUTPUT SUMMARY:

OPTIMAL ALLOCATION:

	1	2	3	4	SUPPLY
1	300	0	200	0	500
2	0	700	0	0	700
3	100	200	0	500	800
DEMAND	400	900	200	500	

SOLUTION VALUE=12000

```
********************************
**                            **
**   TRANSPORTATION MODEL     **
**                            **
********************************
```

UNBLANCED PROBLEM

DUMMY ROW OR COLUMN HAS BEEN ADDED.

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

(1) TYPE OF PROBLEM = MINIMIZATION

(2) NUMBER OF ROWS (SOURCES) =3

(3) NUMBER OF COLUMNS (DESTINATION) =5

(4) TABLEAU VALUES:

	1	2	3	4	5	SUPPLY
1	12	13	4	6	0	500
2	6	4	10	11	0	700
3	10	9	12	4	0	800
DEMAND	400	900	200	500	100	

OUTPUT SUMMARY:

OPTIMAL ALLOCATION:

	1	2	3	4	5	SUPPLY
1	300	0	200	0	100	500
2	0	700	0	0	0	700
3	100	200	0	500	0	800
DEMAND	400	900	200	500	100	

SOLUTION VALUE=12000

```
********************************
**                            **
**   TRANSPORTATION MODEL     **
**                            **
********************************
```

UNBLANCED PROBLEM

DUMMY ROW OR COLUMN HAS BEEN ADDED.

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

(1) TYPE OF PROBLEM = MINIMIZATION

(2) NUMBER OF ROWS (SOURCES) =4

(3) NUMBER OF COLUMNS (DESTINATION) =4

(4) TABLEAU VALUES:

	1	2	3	4	SUPPLY
1	12	13	4	6	500
2	6	4	10	11	700
3	10	9	12	4	800
4	0	0	0	0	100
DEMAND	400	900	200	600	

OUTPUT SUMMARY:

OPTIMAL ALLOCATION:

	1	2	3	4	SUPPLY
1	300	0	200	0	500
2	0	700	0	0	700
3	100	200	0	500	800
4	0	0	0	0	100
DEMAND	400	900	200	500	

SOLUTION VALUE=11400

```
*********************************
**                             **
**   TRANSPORTATION MODEL      **
**                             **
*********************************
```

UNBLANCED PROBLEM

DUMMY ROW OR COLUMN HAS BEEN ADDED.

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

(1) TYPE OF PROBLEM = MINIMIZATION

(2) NUMBER OF ROWS (SOURCES) =4

(3) NUMBER OF COLUMNS (DESTINATION) =4

(4) TABLEAU VALUES:

	1	2	3	4	SUPPLY
1	12	13	4	6	500
2	6	4	10	11	700
3	10	9	12	4	800
4	0	0	0	0	200
DEMAND	400	900	200	600	

OUTPUT SUMMARY:

OPTIMAL ALLOCATION:

	1	2	3	4	SUPPLY
1	300	0	200	0	500
2	0	700	0	0	700
3	100	200	0	500	800
4	0	0	0	0	200
DEMAND	400	900	200	500	

SOLUTION VALUE=12000

```
**********************************
*                                *
*  SIMPLEX LINER PROGRAMMING     *
*                                *
**********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

( ) MIN 12XA + 13XB + 4XC + 6XD + 6YA + 4YB + 10YC + 11YD + 10ZA + 9ZB + 12ZC + 4ZD

SUBJECT TO:

1 XA+XB+XC+XD=500

2 YA+YB+YC+YD=900

3 ZA+ZB+ZC+ZD=800

4 XA+YA+ZA=400

5 XB+YB+ZB=900

6 XC+YC+ZC=200

7 XD+YD+ZD=500

OUTPUT SUMMARY:

THIS TABLEAU IS DEGENERATE

AFTER 6 ITRATIONS

THIS SOLUTION IS OPTIMAL:

VARIBAL	QUANTITY
XA	300
YB	700
ZA	100
A4	0
ZE	200
XC	200
ZD	500

OPTIMAL Z =12000

VRIABLE	SHADOW PRICE
XA	0
XB	-2
XC	0
XD	0
YA	-1
YB	0
YC	-13
YD	-12
ZA	0
ZB	0
ZC	-10
ZD	0
A1	-1999986
A2	-1999993
A3	-1999988
A4	5
A5	-1
A6	-8
A7	-6

```
**********************************
*                                *
*  SIMPLEX LINER PROGRAMMING     *
*                                *
**********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

( ) MIN 12XA + 13XB + 4XC + 6XD + 6YA + 4YB + 10YC + 11YD + 10ZA + 9ZB + 12ZC + 4ZD

SUBJECT TO:

1 XA+XB+XC+XD=500

2 YA+YB+YC+YD=900

3 ZA+ZB+ZC+ZD=800

4 XA+YA+ZA=400

5 XB+YB+ZB=900

6 XC+YC+ZC=200

7 XD+YD+ZD=500

OUTPUT SUMMARY:

THIS TABLEAU IS DEGENERATE

AFTER 6 ITRATIONS

THIS SOLUTION IS OPTIMAL:

VARIBAL	QUANTITY
XA	300
YB	700
ZA	100
A4	0
ZE	200
XC	200
ZD	500

OPTIMAL Z =12000

VRIABLE	SHADOW PRICE
XA	0
XB	-2
XC	0
XD	0
YA	-1
YB	0
YC	-13
YD	-12
ZA	0
ZB	0
ZC	-10
ZD	0
A1	-1999986
A2	-1999993
A3	-1999988
A4	5
A5	-1
A6	-8
A7	-6

****

*   *

* SIMPLEX LINER PROGRAMMING *

*   *

****

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

( ) MIN 12XA + 13XB + 4XC + 6XD + 6YA + 4YB + 10YC + 11YD + 10ZA + 9ZB + 12ZC + 4ZD

SUBJECT TO:

1 XA + XB + XC + XD < =500

2 YA+YB+YC+YD <= 900

3 ZA+ZB+ZC+ZD <= 800

4 XA+YA+ZA=400

5 XB+YB+ZB=900

6 XC+YC+ZC=200

7 XD+YD+ZD=500

OUTPUT SUMMARY:

THIS TABLEAU IS DEGENERATE

AFTER 6 ITRATIONS

THIS SOLUTION IS OPTIMAL:

VARIBAL	QUANTITY
XA	300
YB	700
ZA	100
A4	0
ZE	200
XC	200
ZD	500

OPTIMAL Z =12000

VRIABLE	SHADOW PRICE
XA	0
XB	-2
XC	0
XD	0
YA	-1
YB	0
YC	-13
YD	-12
ZA	0
ZB	0
ZC	-10
ZD	0
S1	-1999987
S2	-1999994
S3	-1999989
A1	0
A2	-1
A3	-8
A4	-6

```
*********************************
*                               *
*  SIMPLEX LINER PROGRAMMING    *
*                               *
*********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

( ) MIN 12XA + 13XB + 4XC + 6XD + 6YA + 4YB + 10YC + 11YD + 10ZA + 9ZB + 12ZC + 4ZD

SUBJECT TO:

1 XA + XB + XC + XD < =500

2 YA+YB+YC+YD <= 900

3 ZA+ZB+ZC+ZD <= 800

4 XA+YA+ZA=400

5 XB+YB+ZB=900

6 XC+YC+ZC=200

7 XD+YD+ZD=500

OUTPUT SUMMARY:

THIS TABLEAU IS DEGENERATE

AFTER 6 ITRATIONS

THIS SOLUTION IS OPTIMAL:

VARIBAL	QUANTITY
S1	500
S2	700
S3	800
S3	400
S4	900
S6	200
S7	500

OPTIMAL Z =0

VRIABLE	SHADOW PRICE
XA	-12
XB	-13
XC	-4
XD	-6
YA	-6
YB	-4
YC	-10
YD	-11
ZA	-10
ZB	-9
ZC	-12
ZD	-4
S1	0
S2	0
S3	0
S4	0
S5	0
S6	0
S7	0

```
*********************************
*                               *
*  SIMPLEX LINER PROGRAMMING    *
*                               *
*********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

( ) MIN 12XA + 13XB + 4XC + 6XD + 6YA + 4YB + 10YC + 11YD + 10ZA + 9ZB + 12ZC + 4ZD

SUBJECT TO:

1 XA + XB + XC + XD < =500

2 YA+YB+YC+YD <= 900

3 ZA+ZB+ZC+ZD <= 800

4 XA+YA+ZA <=400

5 XB+YB+ZB <=900

6 XC+YC+ZC <=200

7 XD+YD+ZD <=500

OUTPUT SUMMARY:

THIS TABLEAU IS DEGENERATE

AFTER 6 ITRATIONS

THIS SOLUTION IS OPTIMAL:

VARIBAL	QUANTITY
XA	300
YB	700
ZA	100
A4	0
ZE	200
XC	200
ZD	500

OPTIMAL Z =12000

VRIABLE	SHADOW PRICE
XA	0
XB	-2
XC	0
XD	0
YA	-1
YB	0
YC	-12
YD	-13
ZA	0
ZB	0
ZC	-10
ZD	0
A1	-999987
A2	-999994
A3	-999989
S1	0
S2	-1
S3	-8
S4	-6

```
*********************************
**                             **
**       ASSIGNEE MODEL        **
**                             **
*********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

(1) TYPE OF PROBLEM = MINIMIZATION

(2) NUMBER OF ROWS =4

(3) NUMBER OF COLUMNS =4

(4) TABLEAU VALUES:

	1	2	3	4
1	24	10	21	11
2	14	22	10	15
3	15	17	20	19
4	11	19	14	13

OUTPUT SUMMARY:

OPTIMAL ASSIGNMENT:

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	1

SOLUTION VALUE = 48

```
**********************************
*                                *
*  SIMPLEX LINER PROGRAMMING     *
*                                *
**********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

( )MIN 24A1 + 10A2 + 21A3 +14A4 +14B1+ 22B2 +10B3 + 15B4 + 15C1 + 17C2 + 20C3 + 19C4 + 11D1 + 19D1 + 19D2 + 14D3 + 13D4

SUBJECT TO:

1 A1 + A2 + A3 + A4 =1

2 B1 + B2 + B3 + B4 =1

3 C1 + C2 + C3 + C4 =1

4 D1 + D2 + D3 + D4 =1

5 A1 + B1 + C1 + D1 =1

6 A2 + B2 + C2 + D2 =1

7 A3 + B3 + C3 + D3 =1

8 A4 + B4 + C4 + D4 =1

OUTPUT SUMMARY:

THIS TABLEAU IS DEGENERATE

VARIBAL	QUANTITY
A1	1
B3	1
D4	1
D1	0
C1	1
C2	0
A7	0
A8	0

OPTIMAL Z = 48

VRIABLE	SHADOW PRICE
A1	-16
A2	0
A3	-11
A4	-1
B1	-6
B2	-12
B3	0
B4	-5
C1	0
C2	0
C3	-3
C4	-2
D1	0
D2	-6
D3	-1
D4	0
A1	-1999988
A2	-1999988
A3	-1999981
A4	-1999985
A5	-2
A6	0
A7	0
A8	0

```
*********************************
*                               *
*  SIMPLEX LINER PROGRAMMING    *
*                               *
*********************************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

( )MIN 24A1 + 10A2 + 21A3 +14A4 +14B1+ 22B2 +10B3 + 15B4 + 15C1 + 17C2 + 20C3 + 19C4 + 11D1 + 19D1 + 19D2 + 14D3 + 13D4

SUBJECT TO:

1 A1 + A2 + A3 + A4 =1

2 B1 + B2 + B3 + B4 =1

3 C1 + C2 + C3 + C4 =1

4 D1 + D2 + D3 + D4 =1

5 A1 + B1 + C1 + D1 =1

6 A2 + B2 + C2 + D2 =1

7 A3 + B3 + C3 + D3 =1

8 A4 + B4 + C4 + D4 =1

OUTPUT SUMMARY:

THIS TABLEAU IS DEGENERATE

VARIBAL	QUANTITY
A1	1
B3	1
D4	1
D1	0
C1	1
C2	0
A7	0
A8	0

OPTIMAL Z = 48

VRIABLE	SHADOW PRICE
A1	-16
A2	0
A3	-11
A4	-1
B1	-6
B2	-12
B3	0
B4	-5
C1	0
C2	0
C3	-3
C4	-2
D1	0
D2	-6
D3	-1
D4	0
A1	-1999988
A2	-1999988
A3	-1999981
A4	-1999985
A5	-2
A6	0
A7	0
A8	0



الباب الرابع

نماذج شبكات الأعمال
تخطيط وجدولة المشاريع
Net Work Models: Project Planning and Scheduling

الفصل السابع

نماذج شبكات الأعمال: اساليب التخطيط والرقابة

Network Models: Planning and Control Techniques

الفصل الثامن:

نظرية المباريات (الألعاب) Games Theory



الفصل السابع

نماذج شبكات الأعمال: تخطيط وجدولة المشاريع

Network Models: Project Planning and Scheduling

7-1 مقدمة

تتميز المشاريع بكونها فريدة من نوعها، بمعنى إنها مجموعة من العمليات التي تنفذ في وقت ما لتحقيق مجموعة من الأهداف وخلال وقت محدد، ولما كانت معظم المشاريع التي تقوم بتنفيذها المؤسسات المختلفة تتسم بكبر الحجم والتعقيد وارتفاع التكاليف، فإنها ولا شك يجب أن تحظى بقدر كبير من التخطيط المسبق، فمثلاً بناء مجمع تسويقي، إقامة مصنع، إطلاق مركبة فضائية، تقديم سلعة أو خدمة جديدة إلى السوق... وغيرها، جميعها أعمال تحتاج إلى تخطيط مسبق ودقيق، ويرجع السبب في ذلك إلى أن المشاريع يجب أن يتم تنفيذها في أوقات محددة إضافة إلى ارتفاع تكاليف التنفيذ وتلك الناجمة عن أي خطأ في التخطيط أو التنفيذ، من هنا نرى أن إدارة المشاريع تتطلب من العاملين عليها التعرف على كيفية إدارة هذه المشاريع بكفاءة وفاعلية، وذلك من خلال التخطيط المسبق والجدولة للفعاليات التي يحتويها المشروع والأولويات فيما بينها بشكل يخفف من نسبة المخاطر ويرفع من مستوى الإنجاز المطلوب.

ولقد تم تطوير مجموعة من الوسائل أو الأساليب التي يمكن استخدامها في تخطيط وجدولة المشاريع منذ بداية الحرب العالمية الثانية، ومن أهمها:

1- طريقة المسار الحرج (The Critical Path Method (CPM

2- طريقة تقويم ومراجعة البرامج (Program Evaluation and Review Technique (PERT

وسوف نقوم هنا بتوضيح طريقتي المسار الحرج وتقويم ومراجعة المشاريع وكيفية تطبيقها في مجال تخطيط وجدولة المشاريع، وتمثل الخطوات الآتية الإطار العام لهذين النموذجين.

1- تعريف المشروع وتحديد جميع الأنشطة المتعلقة به.

2- تحديد العلاقات بين الأنشطة المختلفة وذلك بتحديد أي الأنشطة تسبق أو تتبع الأنشطة الأخرى " تحديد التسلسل بين الأنشطة ".

3- رسم الشبكة الممثلة للمشروع.

4- تقدير الوقت و / أو الكلفة المصاحبة لكل نشاط.

5- حساب أطوال المسارات المختلفة في الشبكة وتحديد أطوالها " المسار الحرج ".

6- استخدام الشبكة والمعلومات المتوفرة عليها للمساعدة في تخطيط، برمجة، ورقابة المشروع.

2-7 طريقة المسار الحرج

من المعروف أن المشاريع تتكون من مجموعة من الأنشطة المتداخلة التي تتطلب التخطيط بشكل دقيق، وطريق المسار الحرج تعتمد في أساسها على تحديد مجموعة الأنشطة التي يجب أن تعطي اهتماماً خاصاً في التخطيط والتنفيذ وذلك لأن إكمال المشروع في وقت محدد وبتكاليف مناسبة يعتمد إلى درجة كبيرة على الأنشطة الموجودة بالمسار الحرج.

وبناءً على ذلك يمكن تعريف المسار الحرج: بأنه المسار الذي يضم مجموعة من الأنشطة والذي يستغرق زمناً أكثر من كافة المسارات في الشبكة، ويعتبر هذا المسار هو الأكثر خطورة في شبكة المشروع.

خطوات تحديد المسار الحرج

من أجل تحديد المسار الحرج لا بد من إتباع مجموعة الخطوات المتسلسلة.

وهذه الخطوات تتلخص بما يلي:

1- تحديد الأنشطة التي يتكون منها المشروع وطبيعة العلاقة أو التتابع فيما بين هذه الأنشطة وكذلك الأوقات اللازمة لتنفيذ كل منها.

2- رسم الشبكة الممثلة إلى هذه الأنشطة وفقاً لطبيعة العلاقات فيما بينهما والتي تعتمد على تسلسل أو تتابع التنفيذ، حيث أن هذه الأنشطة تعتمد على بعضها البعض، وهذا يعني أنه لا يمكن البدء ببعضها قبل إنهاء نشاط أو مجموعة من الأنشطة الأخرى.

3- تحديد وقت البداية المبكر Early Start لكل نشاط من الأنشطة، وهذا يعني أبكر أو أسرع وقت يمكن أن نبدأ به كل منها، وهذا الوقت يكون دائما صفرا لأول نشاط أو مجموعة الأنشطة الواقعة في بداية المشروع.

4- تحديد وقت الإنهاء المبكر Early Finishلكل نشاط، وهذا الوقت هو عبارة عن وقت البداية المبكر لأي نشاط + الوقت اللازم لتنفيذه.

5- تحديد وقت البداية المتأخر Late Start، وهذا يمثل أقصى تأجيل أو تأخير في أوقات بداية الأنشطة دون أن يؤثر ذلك على المشروع بالكامل.

6- تحدبد وقت الإنهاء المتأخر Late Finishوهو عبارة عن وقت البداية المتأخر لأي نشاط + الوقت اللازم لتنفيذه.

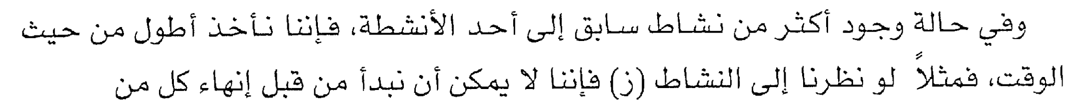
7- تحديد الوقت الفائض أو المتاح وهو عبارة عن وقت البداية المتأخر – وقت البداية المبكر أو وقت الإنهاء المتأخر – وقت الإنهاء المبكر.

مثال (1):

فيما لو كان لدينا أحد المشاريع الذي يتكون من الأنشطة التالية وبالأوقات حسب العلاقات الموضحة أدناه.

الأنشطة	الأوقات باليوم	الأنشطة السابقة
أ	30	–
ب	10	–
ج	60	أ
د	20	ب
هـ	15	ب
و	35	أ، د
ز	10	جـ، و
ح	15	و
ط	10	ز، ح
ي	5	ط
ك	8	هـ، ط
ل	5	ي
م	10	ل

وفي حالة وجود أكثر من نشاط سابق إلى أحد الأنشطة، فإننا نأخذ أطول من حيث الوقت، فمثلاً لو نظرنا إلى النشاط (ز) فإننا لا يمكن أن نبدأ من قبل إنهاء كل من



وذلك لأنه يعتمد على كل من (جـ) و (و) مباشرة، وبالرغم من أننا ننهي النشاط (و) على الوقت 65، فإننا لا نستطيع البدء في تنفيذ (ز) قبل إنهاء (جـ) والذي يكون عند نقطة الوقت 90، لذلك فإننا نعتبر أطول الخطوط هو (أ) ——— (جـ)

3- **تحديد وقت الإنهاء المبكر**

الوقت المبكر للبداية النشاط + الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط

وقت البداية المبكر وقت (أ)

فمثلا وقت الإنهاء المبكر إلى (أ) = 0 + 30 = 30

4- **تحديد وقت البداية المتأخر**، ومن أجل ذلك لا بد من تحديد الأنشطة اللاحقة لكل نشاط، وبعد ذلك نبدأ بتحديد هذه الأوقات مبتدئين من الأسفل إلى الأعلى في حالة الجدول ومن اليسار إلى اليمين في حالة استعمال الشبكة، ووقت البداية المتأخر إلى آخر نشاط أو أنشطة يساوي وقت الإنهاء المبكر للمشروع بالكامل – الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط.

وفي حالة وجود أكثر من نشاط نهائي كما في مثالنا، ناخذ أطول وقت إنهاء وهو المتمثل عند النشاط (م) والبالغ 130 يوماً.

أما بالنسبة إلى الأنشطة الأخرى، فإننا نستخرج أوقات البداية المتأخرة لها وفقا للقانون التالي:

(وقت البداية المتأخر للنشاط اللاحق) – (الوقت الذي يستغرقه النشاط نفسه).

فمثلاً من أجل إيجاد وقت المتاخر إلى (ل) ، فإننا ناخذ وقت البداية المبكر إلى النشاط اللاحق له وهو (م) ونطرح منه الوقت (ل) نفسه، لذلك فإن وقت البداية المتأخر إلى (ل) = 120- 5 = 115

في حالة وجود أكثر من نشاط لاحق لنفس النشاط، فإننا نأخذ أقصر الخطوط، وهذا

يعكس الحالة عند إيجاد وقت البداية المبكر حيث كنا نعتبر أطول الخطوط أو الممرات.

5- **تحديد وقت الإنهاء المتأخر** وهو عبارة عن وقت البداية المتاخر لكل نشاط + وقت ذلك النشاط.

6- **تحديد الوقت الفائض** Stack time

وهذا يمثل في الفرق بين أوقات البداية المتأخرة والمبكرة أو أوقات الإنهاء المتأخرة والمبكرة.

والأنشطة التي لا يوجد لديها وقت فائض، أي أن حاصل العمليات السابقة يكون صفراً تعتبر أنشطة حرجة وذلك لأنها لا تحتمل التأجيل، وهذا يعني أن تأجيل أو الإبطاء في تنفيذ أي منها سوف يؤدي إلى تأجيل المشروع بأكمله، وتسمى هذه الأنشطة بالأنشطة الحرجة والمسار الذي تقع عليه يسمى بالمسار الحرج، وعادة ما يكون هذا المسار هو أطول مسار في الشبكة.

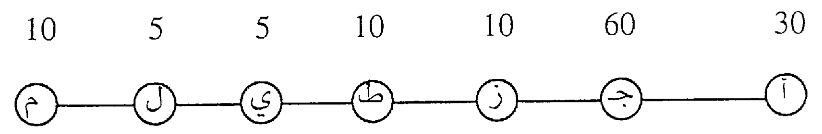
وفيما يلي توضيح لما سبق في الجدول (6-1).

جدول 7-1: كيفية إيجاد المسار الحرج باستخدام الجدول

الأنشطة (1)	الأوقات	الأنشطة السابقة	وقت البداية المبكر (2)	وقت الانتهاء المبكر (3) 2+1	الوظائف اللاحقة	وقت البداية المتأخرة (4)	وقت الانتهاء المتأخرة (5) 4+1	والوقت الفائض 4-2 أو 5-3
أ	30	-	0	30	ح، و	0	30	0
ب	10	-	0	10	د، هـ	20	30	20
جـ	60	أ	30	90	ز	30	90	0
د	20	ب	10	30	و	30	50	20
هـ	15	ب	10	25	ك	107	122	97
و	35	أ،د	30	65	ز، ح	50	85	20
ز	10	جـ، و	90	100	ط	90	100	0

ح	15	و	65	80	ط	85	100	20
ط	10	ز، ح	100	110	ي،ك	100	110	0
ي	5	ط	110	115	ل	110	115	0
ك	8	هـ، ط	110	118	-	122	130	12
ل	5	ي	115	120	م	115	120	0
م	10	ب	120	130	-	120	130	0

نلاحظ هنا أن المسار الحرج يتكون من الأنشطة



كما أن طول هذا المسار هو 130 يوماً وهو وقت اللازم لإنهاء المشروع بأكمله حيث أنه يعتبر أطول مسار في الشبكة.

كما تجدر الملاحظة هنا إلى أن وقت البداية المبكرة ووقت البداية المتأخرة للنشاط الأول هو صفر وأن الوقت الفائض دائماً لهذا النشاط هو صفر.

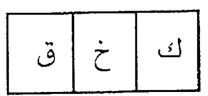
الحل باستخدام الشبكة:

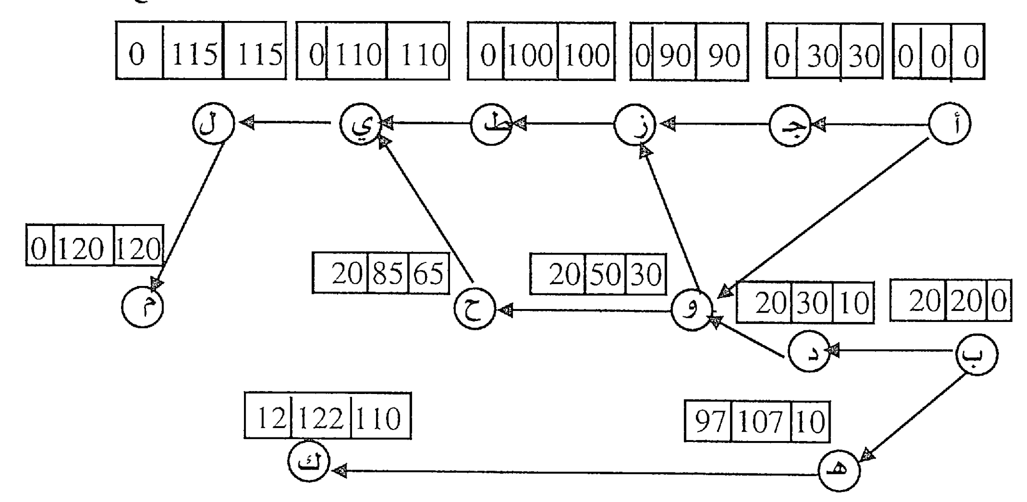
لا تختلف هذه الطريقة عن سابقتها فيما عدا إننا نقوم هنا بإجراء كافة العمليات على الشبكة، وهي في الواقع نفس العمليات من حيث إيجاد أوقات البداية والنهاية المختلفة وكذلك الوقت الفائض، إلا أن المشكلة الكامنة هنا تتمثل في زيادة حجم الشبكة نتيجة وضع كافة الأرقام بداخلها، وفيما يلي توضيح لذلك مستخدمي نفس المثال:

وقت البداية المبكر = ك

وقت البداية المتاخر = خ

الوقت الفائض = ق





نكرر هنا بأنه عند استخدام الشبكة من اليمين إلى اليسار عند إيجاد أوقات البداية المبكرة ومن اليسار إلى اليمين عند إيجادأوقات البداية المتاخرة.

وهنا طريقة أخرى لإيجاد المسار الحرج باستخدام الشبكة وهذه تتلخص بأن نقوم بإيجاد أطوال كافة المسارات ونختار أطوالها حيث يكون هو المسار الحرج.

وبارغم من إننا لا نوصي باستخدام هذه الطريقة وذلك لأن إيجاد المسار الحرج لا يعتبر هدفا بحد ذاته بقدر ما هو وسيلة تستخدم في تحليل وتخطيط المراحل المختلفة من حيث الوقت والتكاليف،إلا أننا سوف نورد هنا توضيحاً لها.

تقييم أو ايجاد أطوال المسارات المختلفة:

30 60 10 10 5 5 10

أ ← جـ ← ز ← ط ← ي ← ل ← م = 130 المسار الحرج

30 35 10 10 5 5 10

أ ← و ← ز ← ط ← ي ← ل ← م = 105

30 35 15 10 5 5 10

أ ← و ← ح ← ط ← ي ← ل ← م = 110

30 60 10 10 8

أ ← جـ ← ز ← ط ← ك = 118

30 35 10 10 8

أ ← و ← ح ← ط ← ك = 93

30 35 15 10 8

أ ← و ← ح ← ط ← ك = 98

10 20 35 10 10 8

ب ← د ← و ← ز ← ط ← ك = 93

10 20 35 15 10 8

ب ← د ← و ← ح ← ط ← ك = 98

10 15 8

ب ← هـ ← ك = 33

3-7 : طريقة تقويم ومراجعة المشاريع Pert

تعتمد هذه الطريقة في أساسها على طريقة المسار الحرج، إلى أن الخلاف الرئيسي فيما بينهما يكمن في طبيعة أوقات الأنشطة المختلفة، ففي حالة المسار الحرج لاحظنا أن هناك وقتاً واحداً لكل نشاط من الأنشطة وأن هذا الوقت أكيد وثابت .Deterministic

أما في حالة تقويم ومراجعة البرامج فإن أوقات الأنشطة هي احتمالية Probabilling وليست ثابتة، لذلك فإننا نحتاج إلى أكثر من وقت واحد لكل نشاط ومن ثم نقوم بإيجاد متوسط هذه الأوقات ليمثل معدل الوقت لكل نشاط.

والسؤال الذي قد يتبادر إلى الذهن هنا، ما هي طبيعة الأوقات الاحتمالية التي تحددها لكل نشاط؟ وفي الواقع أن هذه الأوقات تتراوح بين الإنجاز المبكر جداً والمتأخر جداً والمنطقة الواقعة فيما بينهما، وهذه الأوقات هي:

أ) الوقت المبكر أو التقديرات المتفائلة Optimistic

ب) الوقت الأرجح أو الأكثر احتمالاً Most Likely

ج) الوقت المتأخر أو التقديرات المتشائمة Pessimistic

وهذا ينسجم مع الواقع حيث أن الظروف الداخلية والخارجية التي تمر بها المشروعات قد تتغير مما يصعب معه تحديد أوقاتها بشكل ثابت ومسبق، فلذلك فإن هذه الطريقة تعتبر أكثر نماذج شبكات الأعمال شيوعاً وتتميز بمجموعة من الخصائص هي:

1- إنها تشكل أساساً للتخطيط والتنبؤ، وتزود الإدارة بالوسائل التي تساعدها على التخطيط للاستخدام الأمثل للمصادر المتاحة في سبيل تحقيق الأهداف ضمن أوقات وتكاليف معينة.

2- تساعد الإدارة أو أية جهة متخذه للقرار في التعامل مع الخاطرة المصاحبة للبرامج المختلفة وذلك من خلال تمكنها من الإجابة على بعض الأسئلة:

أ- ما هو تأثير التأخر في إنجاز بعض العناصر أو الأنشطة على إكمال المشروع؟

ب- ما هي الفعاليات أو الأنشطة التي تتوافر فيها نسبة معينة من المرونة؟

ج- ما هي الفعاليات الحرجة وكيف يمكن التعامل معها؟

3- تمثل إحدى الأسس الهامة للحصول على الحقائق الضرورية بعملية اتخاذ القرارات.

4- علاوة على أنها وسيلة تخطيط فهي بنفس الوقت وسيلة رقابة.

5- أنها تقدم الهيكل الأساسي لتزويد أو نقل المعلومات.

وبالرغم من أن هذه الطريقة تعتمد في أساسها على طريقة المسار الحرج، إلى أن احتمالية الوقت بها جعلتها واقعية وانتشاراً.

لقد تم تطوير هذا المنظور في عام 1958 واستخدم في مكتب إدارة المشاريع التابع للجيش الأمريكي وذلك أثناء عملية تطوير صاروخ بولاريس Polaris، وبعد ذلك شاعه استخدامه ليشمل معظم الصناعات والمشروعات المختلفة.

المشاكل المصاحبة لاستخدام طريقة تقويم ومراجعة البرامج / وطريقة المسار الحرج:

إن هذين النموذجين وبالرغم من الفوائد التي يقدمانه، إلا أن هناك بعض المشاكل التي تتعرض سبيل تطبيقهما، ويمكن تلخيص هذه المشاكل بما يلي:

1- عدم رغبة بعض المدراء في تبني هذين الأسلوبين في التخطيط والرقابة، وقد يرجع السبب في ذلك إلى اعتقادهم بأن تطبيق هذه الأساليب قد يقلل من قدرتهم في اتخاذ القرارات التي يريدون.

2- عدم التنسيق بين الأجهزة الإدارية والعاملة، وهذا يعني ضرورة توفير نوع من الإنسجام في مراكز السلطة والمسؤولية وتأمين سبل الاتصالات المناسبة.

3- عدم توفير المعلومات الضرورية لعملية التخطيط ما لم يكن العمل متكرراً، فإن تقدير الأوقات والتكاليف المصاحبة للفعاليات المختلفة إنما يعتمد على نوع المعلومات المتوفرة. فإذا كانت المشروعات جديدة فإن المعلومات قد لا تكون كافية بشكل يضمن سلامة عمليتي التخطيط والرقابة.

مثلا (2): مثال على طريقة تقويم ومراجعة البرامج:

فيما يلي مجموعة من الأنشطة اللازمة لإنهاء مشروع معين وفقا للمعطيات التالية:

الأنشطة	الأنشطة السابقة	الأوقات التقديرية بالأسابيع		
		الوقت المبكر	الوقت الأرجح	الوقت المتأخر
أ	–	1	2	3
ب	أ	1	3	5
جـ	أ	2	3	10
د	ب	2	5	8
هـ	د	1	2	3
و	جـ	1	1	1
ز	جـ	1	1	1
ح	ز	1	3	5
ط	و، ح، ط	2	4	6
ي	هـ، ط	1	5	9

خطوات الحل:

تتلخص خطوات الحل حسب هذه الطريقة بمجموعة النقاط التالية:

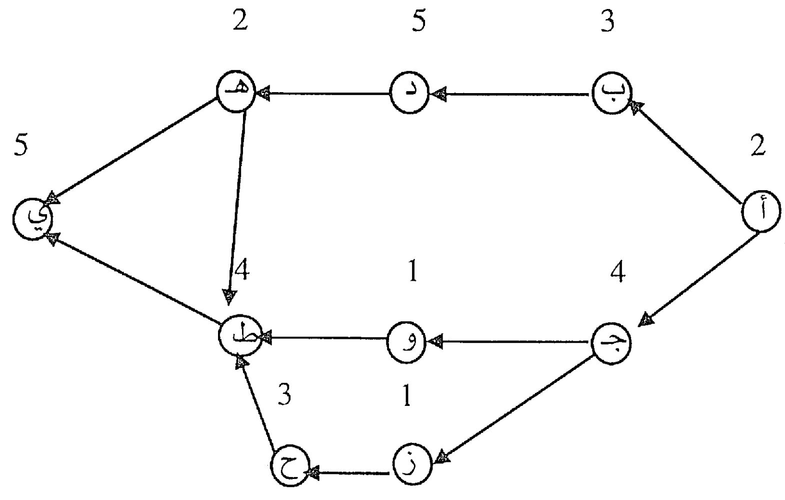
1- إيجاد الوقت المتوقع لكل نشاط، ويتم ذلك عن طريق إيجاد معدل الأوقات الثلاثة وفقاً للقانون التالي:

$$\text{الوقت المتوقع} = \frac{\text{ف} + 4\text{ح} + \text{ش}}{6}$$

وبناءً على ذلك فإن الأوقات المتوقعة للانشطة هنا هي:

النشاط	الوقت المتوقع = $\frac{\text{ف} + 4\text{ح} + \text{ش}}{6}$
أ	2
ب	3
جـ	4
د	5
هـ	2
و	1
ز	1
ح	3
ط	4
ي	5

2- رسم الشبكة الممثلة للعاقات فيما بين النشطة المختلفة كما هو في الشكل (7-2).



شكل رقم 7-2: نموذج شبكة المثال الثاني.

3- إيجاد المسار الحرج وذلك باستخدام نفس الطريقة السابقة واعتمادا على الأوقات المتوقعة، وهنا نستخدم إما الجدول أو الشبكة، وسوف نقوم هنا باستخدام الجدول (7-2).

جدول (7-2) إيجاد المسار الحرج للمثال (2)

الأنشطة	الأوقات المتوقعة	الأنشطة السابقة	وقت البداية المبكر	وقت الانتهاء المبكر	الوظائف اللاحقة	وقت البداية المتأخرة	وقت الانتهاء المتأخرة	الوقت الفائض	الأنشطة الحرجة
أ	2	-	0	2	ب، جـ	0	2	0	أ
ب	3	أ	2	5	د	2	5	0	ب
جـ	4	أ	2	6	و، ز	4	8	2	
د	2	ب	5	10	هـ	5	10	0	د
هـ	5	د	10	12	ط، ي	10	12	0	هـ
و	1	جـ	6	7	ط	11	12	5	
ز	1	جـ	6	7	ح	8	9	2	
ح	3	ز	7	10	ط	9	12	2	
ط	4	و،ح، هـ	12	16	ي	12	16	0	ط
ي	5	هـ، ط	16	21	-	16	21	0	ي

وبذلك يتكون المسار الحرج من الأنشطة التالية وبطول مقداره 21 أسبوعا.

2   3   5   2   4   5

(أ) (ب) (د) (هـ) (ط) (ي) =21 اسبوعاً

4- إيجاد التباين $(ن)^2$ للأنشطة الحرجة وفقاً للقانون التالي:

$$ن^2 = \frac{(\text{الوقت الحرج} - \text{الوقت المبكر})^2}{(6)} = \frac{(\text{ش} - \text{ف})^2}{(6)}$$

وفيما يلي نتائج هذه الخطوة والمعتمدة على الأرقام الأساسية، أي قبل إيجاد الوقت المتوقع.

الأنشطة الحرجة	$ن^2 = \frac{ش - ف}{6}$
أ	$0.111 = \frac{^2(1-3)}{(6)}$
ب	$0.444= \frac{^2(1-5)}{(6)}$
د	$1 = \frac{^2(1-8)}{(6)}$
هـ	$0.111 = \frac{^2(1-3)}{(6)}$
ط	$0.444 = \frac{^2(1-6)}{(6)}$
ي	$1.777 = \frac{^2(1-9)}{(6)}$

مجموع $ن^2 = 3.887$

وبعد إتمام هذه الخطوات تبرز أهمية هذا الأسلوب والمتمثلة في إيجاد الاحتمالات المختلفة لإنهاء المشروع بأوقات قد تزيد أو تنقص عن معدل الوقت المتوقع والمتمثل بطول المسار الحرج.

ومن أجل القيام بهذه المهمة نستفيد من بعض خصائص التوزيع الاحتمالي الطبيعي Normal Distribution.

لماذا التوزيع الطبيعي؟

إن هذا التوزيع يعتبر من أكثر التوزيعات الاحتمالية شيوعاً وذلك لأن معظم التوزيعات الاحتمالية الهامة يمكن تقريبها إلى التوزيع الطبيعي. وترجع هذه الخاصية إلى نظرية الحد المركزي .Central Limit Theorem

وتنص هذه النظرية على " أن التوزيع الاحتمالي لعدد أو مجموعة من الملاحظات أو الأرقام العشوائية تميل إلى التوزيع الطبيعي في النهاية وذلك بغض النظر عن التوزيعات الاحتمالية السابقة لهذه الملاحظات أو الأرقام"[1]

(1) Quantitative Concepts for Management, Eppen Gould, Prentice Hall Inc., Englwiid Cliffs, N.J.,1979.

وبناءً على ذلك، فإننا نقوم باستخدام التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمالات إنهاء المشروع المختلفة وذلك بغض النظر عن التوزيعات الاحتمالية لأوقات الأنشطة الثلاثة (المبكر)، (الأرجح)، (المتأخر).

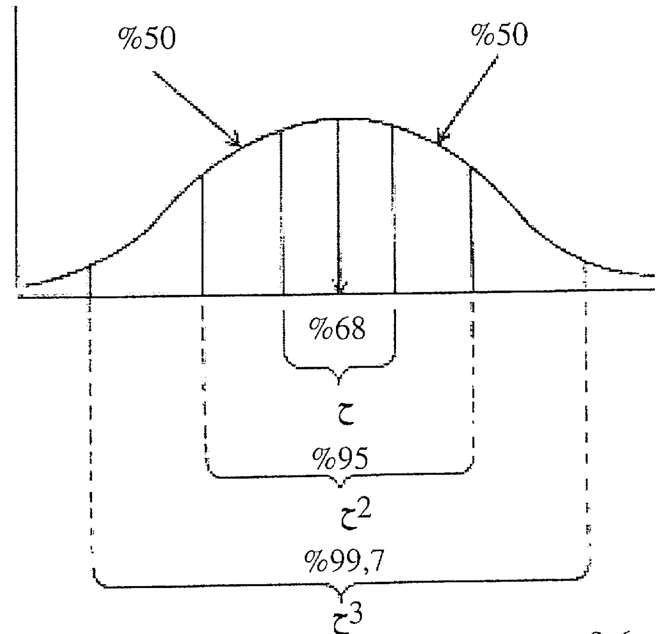
وقبل إيجاد الاحتمالات سوف نوضح هنا أهم خصائص التوزيع الطبيعي.

خصائص التوزيع الطبيعي:

1- إنه توزيع متجانس Symmetricalوهذا يعني أن منحنى التوزيع الطبيعي ينقسم عند نقطة الوسط إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوي 50% من مساحة المنحنى كاملة والبالغة 100%.

2- إن مقاييس النزعة المركزية وهي الوسط والوسيط والمنوال متساوية في حالة التوزيع الطبيعي.

3- إن عدد الانحرافات المعيارية (ح) حول الوسط في التوزيع الطبيعي هي ثلاثة انحرافات من كل جهة، وهذا يعني أن مساحة المنحنى الطبيعي تغطي ثلاثة انحرافات معيارية حول الوسط من كل جهة وذلك وفقاً للعلاقات المبينة فى الشكل (6-3)

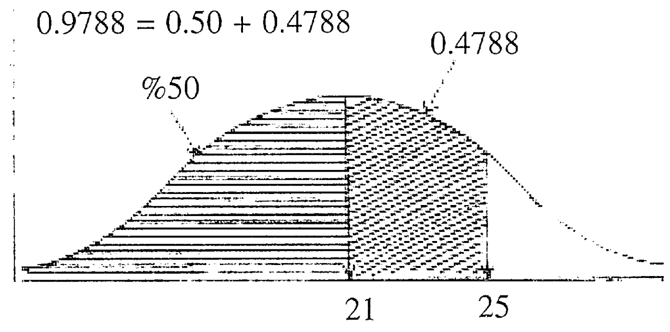


شكل (6-3): شكل التوزيع الطبيعي والمساحات الواقعة ضمن الانحرافات المعيارية.

وتساعدنا هذه الطريقة في إيجاد الاحتمالات المختلفة بعد إيجاد الانحرافات المعيارية.

التوزيع الطبيعي وكيفية إيجاد الاحتمالات:

بعد إيجاد طول المسار الحرج والمتمثل بمعدل الوقت المتوقع لإنهاء المشروع، نضع هذا الرقم في منطقة الوسط تحت منحنى التوزيع الطبيعي. وفي مثالنا كان طول المسار الحرج =21 أسبوعاً.



فلو أردنا مثلاً إيجاد احتمال إنهاء المشروع في 25 أسبوعاً، فإننا في هذه الحالة نبحث عن مساحة المنطقة المظللة. ومن أجل ذلك نقوم بإيجاد الانحرافات المعيارية الممثلة لهذه المساحة. وسوف نرمز لها بالرمز (ز). ومن أجل ذلك نستخدم القانون التالي:

$$ز = \frac{\text{الوقت المطلوب (ص)} - \text{معدل الوقت المتوقع (س)}}{\text{الانحراف المعياري للوظائف الحرجة}} = \frac{ص - س}{\sqrt{\Sigma ن^2}}$$

ص = 25

س = 21

$$ز = \frac{25 - 21}{\sqrt{3.887}} = \frac{4}{1.9715}$$

$\Sigma ن^2 = 3.887$

$= 2.0289$

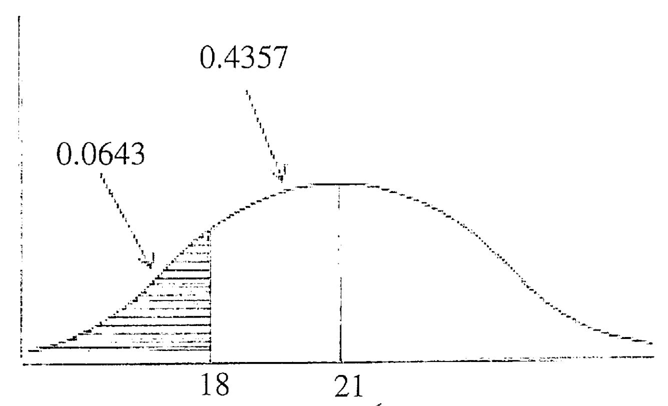
$\cong 2.03$

إن أهمية القيمة تمثل الانحرافات المعيارية الواقعة بين النقطتين 25-21.

ومن أجل إيجاد مساحة المنحنى بين هاتين النقطتين نقوم باستعمال جدول التوزيع الطبيعي الموجود في نهاية هذا الفصل. وبالنظر تحت قيمة (Z) عمودياً إلى النقطة2 وأفقياً إلى النقطة 0.03 نرى أن نقطة تقاطعهما هي 4788 .0 وهذه تمثل مساحة المنحنى الواقعة بين النقطتين. ومن أجل إيجاد احتمال إنهاء المشروع في 15 أسبوعاً نقوم بإضافة

المساحة الأخرى من المنطقة المظللة والواقعة إلى اليسار من نقطة الوسط (21). وكما نعرف فإن هذه تمثل50% من إجمالي المساحة. لذلك فإن احتمال إنهاء المشروع في 25 أسبوعاً هي 0.50 + 0.4788 = 0.9788

والآن لو أردنا إيجاد احتمال إنهاء المشروع في 18 أسبوعاً أو أقل فإن هذا يمثل إيجاد مساحة المنطقة المظللة في الشكل.



ومن أجل هذه المساحة نقوم أولاً بإيجاد المساحة بين 12-18 ومن ثم نطرحها من كامل المساحة إلى اليسار من21 وهي 50%.

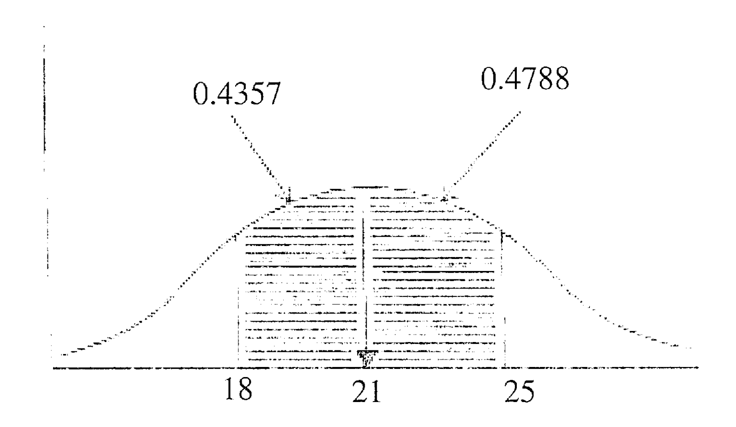
$$ز = \frac{21 - 18}{\sqrt{3.887}} = \frac{3-}{1.9715} = 1.52$$

ومن الجدول نرى أن المساحة المقابلة لهذا الرقم هي 0.4357 ونلاحظ هنا أنه لا يوجد فرق بين القيم السالبة والموجبة في الجدول. وإنما ترشدنا هذه الإشارات إلى موقع المساحة المطلوبة من الوسط. فالإشارة الموجبة تعني أن المساحة تقع إلى يمين الوسط والسالبة تقع إلى يساره.

لذلك فإن إنهاء المشروع في 18 أسبوعاً أو أقل هي

0.0643 = 0.4357 - 0.50

أما احتمال إنهاء المشروع في الفترة من 18-25 أسبوعاً فهي تتكون من المنطقة التالية:



وهذه المنطقة تتكون من حاصل جمع النواتج السابقة وهي

$$0.9145 = 0.4357 + 0.4788$$

4-7: تمثل الأنشطة أو الفعاليات على الخطوط Activities of Arrows (AOA)

لقد سبق وذكرنا بأن هناك طريقتان رئيسيتان لتمثيل الأنشطة، هما ما على الدوائر أو على الخطوط. ولقد قمنا بتوضيح الأولى فيما سبق. وسوف نقوم هنا بتوضيح الثانية. وبالرغم من عدم اختلاف الطريقتين من حيث النتائج، إلا أن الثانية قد تكون أكثر شيوعاً في مجالات البرمجة.

المصطلحات المستخدمة:

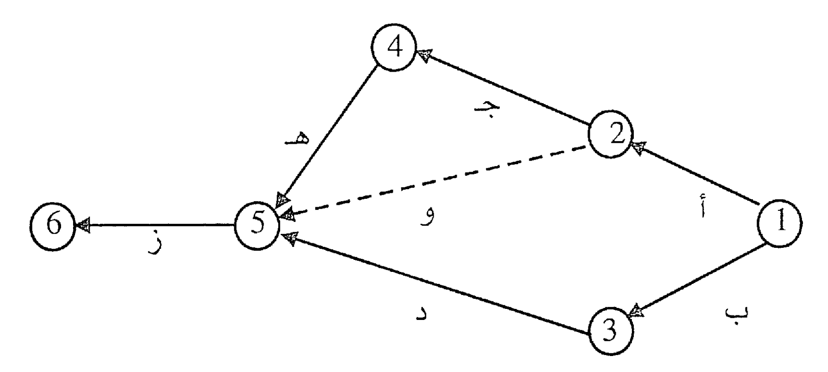
1- السهم (←) ويمثل نشاط والذي يجب إنجازه وله بداية ونهاية محدودتين. والنشاط يستهلك وقتاً وبالتالي له كلفة.

2- الدائرة (O) وتمثل حدثاً وهي عبارة عن نقطة زمنية في عمر المشروع وتمثل نقطة البداية أو النهاية لنشاط معين. والحدث لا يستهلك وقت وبالتالي ليس له كلفة.

3- السهم المنقط (← – –) ويمثل نشاطاً وهمياً والذي لا وجود حقيقي له ويستخدم فقط لتبيان العلاقات بين الأنشطة المختلفة وهو لا يستهلك وقت وبالتالي ليس له كلفة.

4- شبكة الأعمال وهي عبارة عن مجموعة من الأنشطة والأحداث ولها نقطة بداية ونقطة نهاية واحدة. المثال الآتي يوضح ذلك.

مثال يوضح العلاقات بين الأنشطة



حيث يلاحظ من الشكل أعلاه أن المشروع يتكون من "6" أنشطة، وأن هناك نشاطاً وهمياً (و) وهذا يعني أنه لا يمكن البدء بالعمل على النشاط (ز) ما لم تنتهي من العمل على الأنشطة (أ، ب، هـ)....

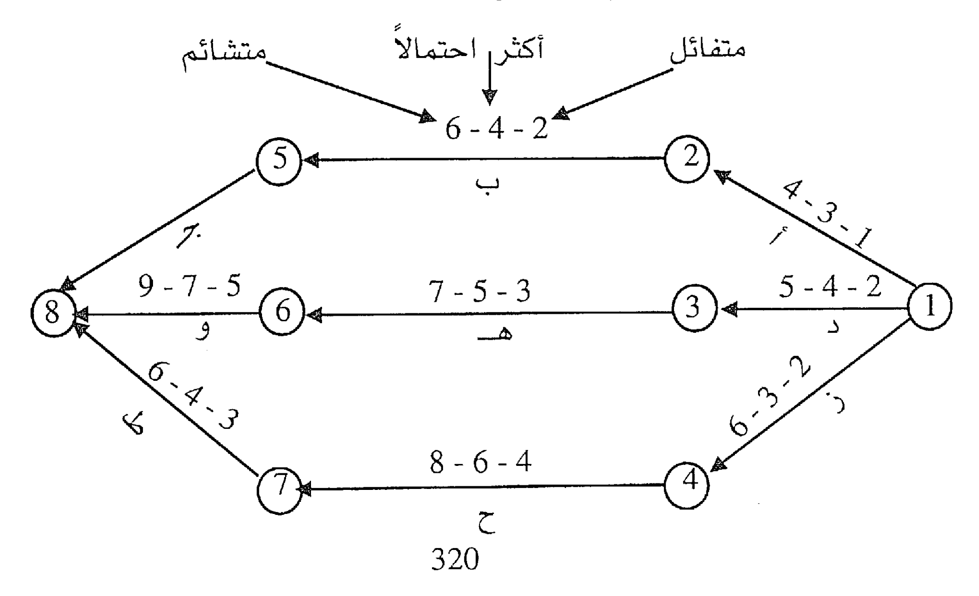
مثال: افرض أن لدينا المشكلة المتمثلة بشبكة الأعمال الآتية، والتي توضح الفعاليات والأوقات الثلاثة لكل فعالية، الأوقات للفعاليات هي بالأشهر.

المطلوب ما يأتي:

1- احتساب معدل الوقت المطلوب لكل فعالية، وكذلك معدل الدورة الزمنية لكل مسار.

2- تحديد المسار الحرج.

3- احتساب التباين لكل فعالية ولكل مسار.



الحل:

أ)

المسار	الفعالية	الوقت			معدل الوقت للفعالية	معدل الوقت للمسار
		ف	ح	ش		
أ - ب - جـ	أ	1	2	4	2.83	10,000
	ب	2	4	6	4	
	جـ	2	3	5	3.16	
د - هـ - و	د	3	4	5	4	16
	هـ	3	5	7	5	
	و	5	7	9	7	
ز - ح - ط	ز	2	3	6	3.33	13.5
	ح	4	6	8	6	
	ط	3	4	6	4.17	

ب) المسار الذي يستغرق أطول وقت يمثل المسار الحرج. ولما كان المسار د-هـ-و يستغرق أعلى وقت، فإنه يعتبر المسار الحرج.

ج)

المسار	الفعالية	ف	ح	ش	التباين للفاعلية ن = $\frac{(ش - م)^2}{(2)}$	التباين	الانحراف المعياري
أ - ب - جـ	أ	1	3	4	$\frac{(1-4)^2}{36} = \frac{9}{36}$	$\frac{34}{36} = 0.944$	0.97
	ب	2	4	6	$\frac{16}{36}$		
	جـ	2	3	5	$\frac{9}{36}$		
د - هـ - و	د	3	4	5	$\frac{4}{36}$		
	هـ	3	5	7	$\frac{16}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$	1
	و	5	7	9	$\frac{16}{36}$		
ز - ح - ط	ز	2	3	6	$\frac{16}{36}$	$\frac{41}{36} = 1.139$	1.7
	ح	4	6	8	$\frac{16}{36}$		
	ط	3	4	6	$\frac{4}{36}$		

- إن معرفة معدل الوقت اللازم لمسار معين وكذلك الانحراف المعياري يساعد المدراء على وضع التقديرات الاحتمالية المتعلقة بوقت إكمال المشروع.

مثال: احتمال إنهاء العمل على المشروع خلال 17 شهر هو 84%

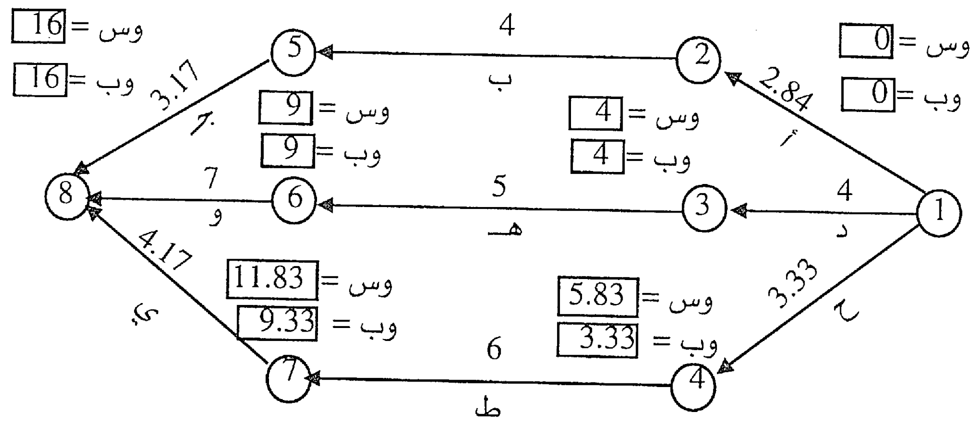
ح (س ≥ 17) = ز ≥ $\frac{\text{الوقت المحدد - معدل الوقت للمسار الحرج}}{\text{الانحراف المعياري للمسار الحرج}}$

ز = $\frac{17 - 16}{1} = 1$

من الجدول ز = 84% = 0.84

وس = 8.83 وس = 12183

وب = 2.84 وب = 6.84

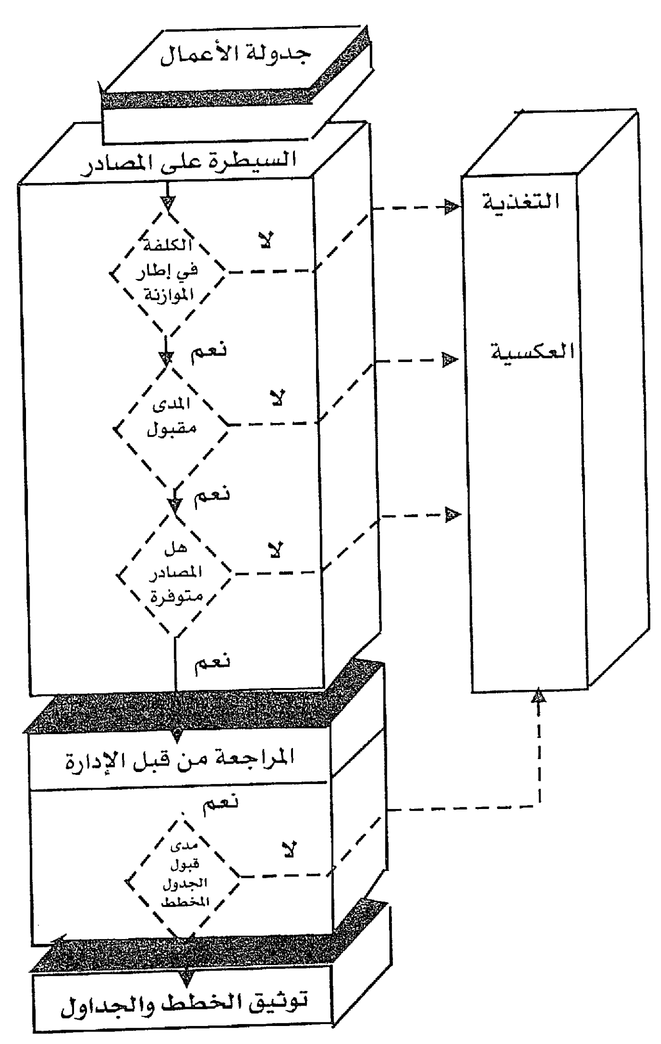


الحدث	(وب) أبكر وقت للبدء	آخر وقت مسموح به (وس)	الوقت الفائض "الغير مستغل" (وس-وب)
1	0	0	0
2	3.83	8.83	5.99
3	4	4	0
4	3.33	5.83	2.5
5	12.83	12.83	5.99
6	9	9	0
7	11.83	11.83	2.5
8	16	16	0

- لا يوجد وقت عاطل في الممر الحرج ولكل الفعاليات.
- يمكن أن يكون هنالك أكثر من ممر أو مسار حرج واحد.

إعادة التخطيط Network Deplaning

أن شبكة الأعمال الممثلة لطريقة تقويم ومراجعة المشاريع أو لطريقة المسار الحرج تمثل الإطار العملي لتخطيط أكثر تفصيلاً ومن ثم الرقابة على الكلف، حيث أن هنالك إعادات كثيرة وأثناء مرحلة التخطيط وقبل الوصول إلى مخطط نهائي للمشروع وكما يوضح الشكل الآتي:



الخطوات المتكررة في وضع الجدولة لطريقة تقويم ومراجعة المشاريع.

إن الوقت الفائض يشكل الأساس في عملية إعادة التخطيط ويمكن إجراء هذه المهمة أما أثناء وضع البرنامج أو أثناء تطبيقه ولا سيما في حالة وجود حالات أو ظروف غير متوقعة أثرت على عملية تنفيذ البرنامج.

إن تحويل المصادر من الفعاليات والمسارات غير الحرجة للفعاليات والمسارات الحرجة إنما تمثل أحد الطرق المتاحة لتقصير الوقت المتوقع للمشروع ذلك أن هناك أربع طرق أخرى متاحة لهذا الغرض:

1- استبعاد بعض أجزاء المشروع.

2- إضافة مصادر أخرى.

3- الاعتماد على العناصر التي تحتاج إلى وقت أقل "كالاعتماد على قوى عاملة أكثر مهارة وتدريب".

4- تنفيذ للفعاليات بشكل متوازي، أي تنفيذ أكثر من فاعلية في نفس الوقت، كأن تقوم بإصدار الأوامر بشراء المواد الأولية بعد الانتهاء من المناقشة على المشروع وقبل توقيع الاتفاق، إن هذا العمل سيؤدي إلى تقليص للوقت وبالتالي الإسراع في تنفيذ العمليات وكلفة مصحوبة بدرجة مخاطرة يجب أن لا تغيب عن أذهاننا.

وأخيرا فإن عملية إعادة التخطيط يجب أن تكون عملية مستمرة أثناء تنفيذ المشروع، أن المدير الناجح هو ذلك الذي يعمل باستمرار على تقدير والتنبؤ بالانحرافات والأخطاء المصاحبة لعملية التنفيذ ومن يعمل على ملاقاتها من خلال عملية إعادة الجدولة ذلك أن القيود وكذلك الأهداف للمشروع يمكن أن تتغير عملية التنفيذ.

الأهداف الرئيسية هي تنفيذ المشروع وفقاً لما يأتي:

أ) أقل وقت.

ب) أقل كلفة.

ج) أقل مخاطرة.

وإن الأهداف الثانوية تتضمن:

أ) دراسة وتحليل البدائل المتاحة.

ب) وضع الجداول التي يتوقع أن تصاحبها أفضل النتائج.

ج) استخدام فعال للمصادر.

د) اتصالات جيدة.

هـ) تعزيز التقديرات السابقة من خلال الاعتماد على معلومات أفضل وحديثة وبشكل مستمر.

و) سهولة الرقابة على المشروع.

ز) سهولة تعديل أو مراجعة الكلفة وكذلك الوقت.

إن هذه الأهداف محددة بالقيود الآتية:

1- الوقت المحدد لإنهاء المشروع.

2- القيود المتعلقة بالتدفقات النقدية.

3- المصادر المحدودة.

4- موافقة الإدارة العليا.

المتاجرة بين الكلفة والوقت (Time/Cost Tradeoffs)

لقد أشرنا إلى البدائل المتاحة لتقصير الوقت اللازم لإنهاء بعض الفعاليات أو للإسراع بإنجازها:

1- استخدام أموال إضافية وذلك لتوظيف موظفين جدد أو استخدام مكائن أكثر فعالية.

2- تعديل أو تلطيف بعض احتياجات أو خصائص العمل.

3- الاعتماد على عناصر ذات كفاءة عالية.

4- تنفيذ الفعاليات بشكل متوازي.

5- تحويل المصادر من الأنشطة والمسارات غير الحرجة للأنشطة والمسارات الحرجة.

أن الهدف من تقييم المتاجرة بين الكلفة والوقت هو لتحديد خطة والتي ستؤدي إلى تقليل أو تخفيض الكلف المباشرة وغير المباشرة ولكي يتمكن المدير من اتخاذ قرار رشيد في مجال أي الفعاليات "إن وجد" يمكن تخفيض وقتها أو الإسراع في إنجازها فإنه يحتاج إلى المعلومات الآتية:

أ) الوقت العادي والمستعجل لكل فعالية Crash & Regular Time

ب) تقدير الكلفة العادية والكلفة المصاحبة للإنهاء السريع ولكل فعالية.

جـ) وضع قائمة بالفعاليات التي يحتويها المسار الحرج.

إن الفعاليات الموجودة في المسار الحرج هي الفعاليات المرشحة للانتهاء بسرعة، وذلك أن تقصير الوقت اللازم للفعاليات غير الحرجة سوف لا تكون له أي تأثير على الوقت اللازم لإنهاء المشروع.

ومن وجهة نظر اقتصادية، فإنه يجب العمل على تقصير الوقت اللازم للفعاليات وفقاً للكلفة المصاحبة لذلك وكما يأتي:

- البدء في تخفيض الوقت اللازم للفعاليات التي تحتاج إلى أقل كلفة.

- الاستمرار في تخفيض الوقت للفعاليات ما دامت الكلفة المصاحبة لذلك أقل من الفوائد المتحققة من ذلك، أو ما دمنا لم نتجاوز حدود ميزانية معينة ومخصصة لهذا الغرض.

الإجراءات العامة لتخفيض الوقت:

1- الحصول على تقدير للوقت والكلفة العاديين والمصاحبين لتقصير الوقت وكذلك الكلف غير المباشرة.

2- تحديد أطوال المسارات المختلفة والوقت الفائض للمسارات.

3- تحديد الفعاليات التي في المسار الحرج.

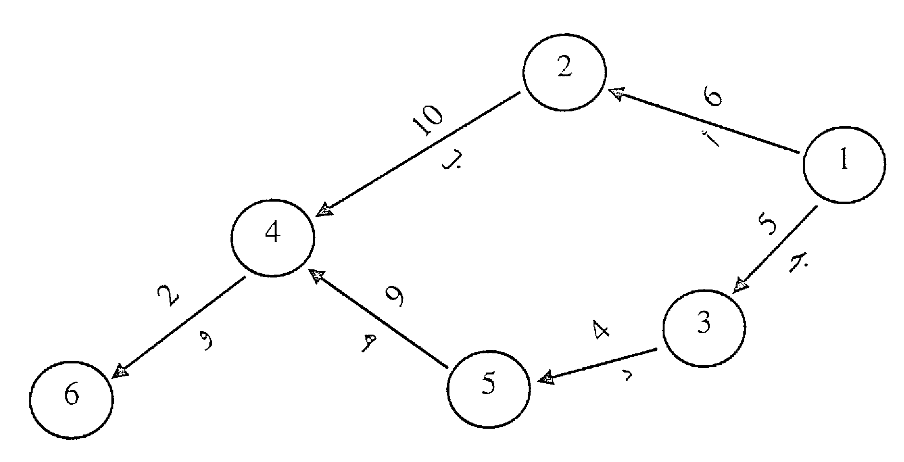
4- تخفيض أوقات الفعاليات الحرجة وعلى أساس البدء بأقل كلفة ثم التي تليها وهكذا ....الكلف المتزايدة.... وطالما أن كلفة التخفيض هي ضمن المعقول والمحدود ولا تزيد على الفوائد.

•• يجب الانتباه إلى أنه ونتيجة تخفيض الوقت لبعض الفعاليات في المسار الحرج أن هنالك إمكانية أن يصبح هناك اثنين أو أكثر من المسارات مسارات حرجة وهذا يتطلب أو يعني أن الاستمرار في التحسين قد يشمل اثنين أو أكثر من الممرات مع بعض أو في آن واحد، وفي بعض الحالات قد نجد أنه أكثر اقتصادياً أن نقوم بتقصير الوقت اللازم فعالية موجودة في ممرين أو أكثر (مشتركة) من الممرات التي أصبحت ممرات حرجة.

مثال: افتراض أن الكلف غير المباشرة هي 1000 دينار يوميا، وافترض المعلومات التالية:

الفعالية	الوقت العادي	الوقت السريع	الكلفة المصاحبة لتقليص يوم واحد
أ	6	6	0
ب	10	8	500 دينار
جـ	5	4	300 دينار
د	4	1	700 دينار
هـ	9	7	600 دينار
و	2	1	800 دينار

المطلوب: تطوير حل مثالي قائم على أساس المتاجرة بين الوقت والكلفة وعلى افتراض أن الشكل الآتي يمثل المشروع موضوع البحث.



الحل:

أ- تحديد أطوال المسارات وبالتالي تحديد المسار الحرج والفعاليات التي يحتويها.

المسار	الطول
أ ب و	18
جـ د هـ و	20 (المسار الحرج)

ب- ترتيب الفعاليات الحرجة وفقاً لكلفة التعجيل ومن الأقل فالأكثر، وتحديد عدد الأيام التي يمكن تقليصها.

الفعالية	الكلفة لكل يوم يخفض	الأيام التي يمكن تقليصها
جـ	300	1
هـ	600	2
و	700	3
د	800	1

جـ- البدء في تقليص الوقت اللازم لإنهاء المشروع، وذلك بتقليصه يوماً واحداً كل مرة. ثم ملاحظة أطوال المسارات للتأكد من المسار الحرج أو للتعريف أي المسارات هو المسار الحرج الآن وبعد التقليص.

د) (1) تقليص فعالية جـ بمقدار يوم واحد وبكلفة قدرها (300) دينار، حي يصبح طول المسار الخط أو المسار الحرج 19 يوما الآن.

(2) تقليص فعالية هـ بمقدار يوم واحد بكلفة (600) دينار أن طول المسار الآن (حـ د هـ و) وهو (18) يوماً والذي يساوي طول المسار أ ب و.

ولما كان كلا المسارين حرجين الآن، فإن التخفيض يتطلب تقليص فعالية من كل منها، وفيما يلي الفعاليات المتبقية ولكل مسار وإمكانية التخفيض أي عدد الأيام التي يمكن أن تخفض منها ثم الكلفة المصاحبة لذلك.

المسار	الفعالية	الكلفة اليومية للتخفيض
أ ب جـ	أ	لا يوجد إمكانية للتخفيض
	ب	500
	جـ	800
جـ د هـ و	جـ	لا يوجد إمكانية للتخفيض
	د	700
	هـ	600
	و	800

بملاحظة عابرة للمعلومات أعلاه يبدو أن تخفيض فعالية وغير اقتصادية ذلك أن كلفة تخفيضها تمثل الكلفة الأعلى بين كلف التخفيض ولكن فاعلية وهي فعالية مشتركة وهذا يعني أن تخفيض هذه الفعالية بمقدار يوم واحد سيؤدي إلى تقليص المسارين (أ ب و، جـ د هـ و) وبالتالي المشروع ككل بمقدار يوم واحد وبكلفة مقدارها 800 دينار.

أن البديل لتقليص فعالية و هو تقليص الفعاليات الأقل كلفة في كل من المسارين وهذا يعني تقليص فعالية ب والتي كلفتها (500) دينار، وفعالية هـ **وبكلفة قدرها 600 دينار**، أي بكلفة مجموعها 1100 دينار، وهذا يعني أن تقليص و بمقدار يوم واحد يؤدي لنفس النتيجة **"أي تقليص المشروع ليوم واحد" وبكلفة أقل 800 دينار** وبناء على ذلك سنقوم بتقليص فعالية و بمقدار يوم واحد حيث تصبح المدة اللازمة لإنهاء المشروع الآن 17 يوماً.

(3) في هذه النقطة، لا توجد إمكانية عملية لتقليص مدة المشروع، ذلك أن كلفة تقليص فعالية ب تساوي 500 دينار، وكلفة تقليص فعالية هـ تساوي 600 دينار، وبالتالي بمجموع كلف قدره 1100 دينار وهذا يعني يزيد على الكفلة اليومية المصاحبة لإدارة المشروع يوماً واحداً.

الجدول التالي يمثل تسلسل التخفيض.

المسار	طول المسار بعد تقليص ب ن يوماً				
أ ب و	ن =	0	1	2	3
		18	18	18	17
ج د هـ و		20	19	18	17
الفعالية			جـ	هـ	و
كلفة التخفيض			300	600	800

أسئلة:

1- ما هي الأسئلة التي يمكن أن نحصل على إجابة عليها من طريقتي المسار الحرج وتقويم ومراجعة المشاريع؟

2- ما هي الفروقات الرئيسية بين طريقتي تقويم ومراجعة المشاريع والمسار الحرج؟

3- ما المقصود بالنشاط؟ وما المقصود بالحدث؟

4- وضح كيف يمكن احتساب الوقت المتوقع وكذلك التباين للأنشطة في طريقة تقويم ومراجعة المشاريع.

5- ماذا يعني المسار الحرج وما هي الأنشطة الحرجة وما أهميتها؟

6- ماذا يعني أبكر وقت للبدء وآخر وقت للبدء وكيف يمكن احتسابها؟

7- ماذا يعني بالوقت الفائض وكيف يمكن احتسابه؟

8- كيف يمكن أن نحدد احتمال إنهاء المشروع خلال فترة زمنية معينة، وما هي الافتراضات التي اعتمدنا عليها.

9- اشرح باختصار مفهوم المتاجرة بين الوقت والكلفة.

10- ماذا يعني بالتسريع وما هي إجراءاته.

تمارين

س1: افترض المعلومات الآتية والمتعلقة بمشروع صغير:

النشاط	النشاط الذي يسبق	النشاط المتوقع بالأيام	التباين	كلفة التخفيض لليوم الواحد	الحد الأعلى للأيام التي يمكن تخفيضها
أ	-	16	2	100 دينار	3
ب	-	11	9	50 دينار	1
جـ	-	13	5	200 دينار	2
د	أ	6	4	-	-
هـ	جـ، و، ز	4	4	300 دينار	1
و	د	4	1	150 دينار	1
ز	ب	7	3	200 دينار	2

المطلوب:

أ- رسم الشبكة الممثلة لهذا المشروع، واحتساب المسار الحرج وتباين أهميته.

ب- احتساب أبكر وقت ممكن، آخر وقت مسموح به والوقت الفائض ولكل حدث (نقطة زمنية).

جـ- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال 19 يوماً (أي بزمن مساو أو أقل من 19 يوماً).

د- إذا أردت اختيار نشاط واحد فقط لتخفيض وقته فأي الأنشطة تختار؟ ولماذا؟

هـ- إلى أي حد يمكن تقليص وقت للمشروع علماً بأن الكلفة الثابتة للمشروع هي 150 دينار في اليوم، أي أنه يمكن توفير 150 دينار، عن كل يوم تخفيض في حياة المشروع.

س2: تأكد لمدير التجهيزات في شركة التأمين أن نظام التبريد لا يعمل بالشكل المرجو منه، وبعد مداولات مع المتعهد، تعهد الأخير باستبدال وحدة التبريد القديمة بأخرى جديدة على أن تقوم شركة التأمين بدفع نصف التكاليف يهدف المدير إلى إنجاز هذا العمل بأسرع ما يمكن ولذا فقد جمع المعلومات الآتية:

	النشاط الذي يسبق	الوقت المتوقع للنشاط بالأيام	الانحراف المعياري للنشاط بالأيام	الحد الأدنى للوقت المتوقع (الوقت السريع)	كلفة التخفيض لليوم الواحد بالدينار
وضع الطلبية (أ)	-	3	1	2	500
سحب المولد القديم (ب)	أ	4	0	2	100
سحب وإزالة المروحة القديمة (جـ)	أ	6	0	4	200
إنتاج وحدة جديدة (د)	أ	4	3	4	-
إزالة المولد القديم (هـ)	ب	5	5	2	400
تهيئة مكان العمل (و)	جـ	3	2	2	80
تهيئة الوحدة الجديدة (ز)	د	7	1	3	120
نصب الوحدة الجديدة (ح)	و، ز	3	2	3	-
البدء بتشغيل الوحدة الجديدة (ط)	هـ، ح	2	1	2	-

لقد ارتأى المدير أنه من المفيد جدولة هذا المشروع، وذلك باستخدام نموذج تقويم مراجعة المشاريع (pert) وذلك لمساعدته في تحديد المسار الحرج والوقت الحرج، أخيراً افرض أن المدير ينوي صرف ما مقداره 400 دينارا لتخفيض الوقت اللازم للمشروع.

المطلوب:

- رسم شبكة الأعمال الممثلة لهذا المشروع.
- تحديد المسار الحرج.
- تخفيض وقت المشروع وباستخدام الميزانية المحددة أعلاه، وتبيان النتائج المترتبة على ذلك.
- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال 16 يوما.

س3: إحدى شركات صناعة الأغذية تقوم ببناء مصنع لصناعة نوع جديد من الأغذية المجمدة، الجدول الآتي يبين الأنشطة التي يتضمنها المشروع، تتابع هذه الأنشطة، وأوقاتها المتوقعة.

النشاط	وصف النشاط	النشاط الذي يسبق	الوقت المتوقع بالأشهر
أ	تصميم البناية	لا شئ	1.5
ب	تصميم الخط الانتاجي	لا شئ	1
جـ	تصميم الفرن	ب	2
د	تصميم المجمد	ب	1
هـ	تصميم أو تحديد آلة التغليف	ج ، د	1
و	طلب الفرن وصنعه	جـ	9
ز	طلب المجمد وصنعه	د	8
ح	طلب آلة التغليف وصنعها	هـ	3
ط	طرح العطاء بالنسبة للبناية	أ	2
ي	بدء البناء - المرحلة الأولى	ط	9
ك	بدء البناء - المرحلة الثانية	ي	1.5
ل	نصب الفرن	و،ي	2
م	نصب المجمد	ي، ل	0.5
ن	نصب آلة التغليف	ح ، ي	0.5
س	اختبار تحضير الطعام	ك، ل	1
ص	اختبار تجميد الطعام	م، س	0.5
ع	اختبار نظام ككل	ن، ص	0.5
ف	اختبار وزارة الصناعة والتجارة	ن، ص	0.5

المطلوب:

- ارسم الشبكة الممثلة للمشروع.
- رسم الشبكة الممثلة للمشروع.
- تحديد المسار الحرج.

س4: الجدول التالي الآتي يحتوي على معلومات تتعلق بالأنشطة وتتابع هذه الأنشطة المتعلقة بإكمال رسالة الدكتوراه.

النشاط	وصف النشاط	النشاط الذي يسبق	الوقت المتوقع بالاسابيع
أ	مراجعة ما كتب حول الموضوع	لا شئ	6
ب	صياغة العنوان	لا شئ	5
جـ	اختيار اللجنة	ب	2
د	تقديم المشروع رسميا	جـ	2
هـ	تحديد الشركات ذات العلاقة والاتصال بها	أ، د	2
و	تقارير التقديم	د	1
ز	البحث الرسمي	أ، د	6
ح	جمع المعلومات	هـ	5
ط	تحليل المعلومات	ز، ح	6
ي	الاستنتاجات	ط	2
ك	تقديم أولي للرسالة	ز	4
ل	تقديم الرسالة بشكلها النهائي	ي، ك	3
م	الامتحان الشفوي	ل	1

المطلوب:

1- رسم الشبكة الممثلة لهذا المشروع.

2- احتساب أبكر وقت للبدء، أبكر وقت للإنتهاء، آخر وقت للبدء وآخر وقت للإنتهاء.

3- تحديد المسار الحرج والأنشطة التي يحتويها المسار الحرج.

س5: لقد أعطيت مسؤولة إدارة برنامج البحث والتطوير في دائرتك، وقد حصلت على المعلومات الآتية:

النشاط	أبكر وقت للبدء	آخر وقت للبدء	الوقت المتوقع للنشاط	الكلفة الكلية بآلاف الدنانير
أ	0	0	6	10
ب	1	4	2	14
جـ	3	3	7	5
د	4	9	3	5
هـ	6	6	10	14
و	14	15	11	13
ز	12	18	2	4
ح	14	14	11	6
ط	18	21	6	18
ي	18	19	4	12
ك	22	22	14	10
ل	22	23	8	16
م	18	24	6	18

المطلوب:

أ- استخدام أبكر وقت للبدء لتحديد موازنتك الشهرية.

ب- استخدام آخر وقت للبدء لتحديد موازنتك الشهرية.

س6: لقد أعطيت المعلومات الآتية والمتعلقة بأحد المشاريع:

النشاط	النشاط الذي يتبع	الوقت المتوقع بالأسابيع
البداية	أ، ب، جـ	–
د	و	6
و	ز	2
جـ	هـ	5
ب	ح	4
ح	ط	6
ز	النهاية	2
ط	النهاية	1

المطلوب:

1- رسم الشبكة الممثلة لهذا المشروع.

2- تحديد المسار الحرج.

3- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال عشرين يوما.

س7: لقد توفرت لديك المعلومات الآتية:

النشاط	وقت النشاط بالأرقام	النشاط الذي يسبق
أ	10	-
ب	15	أ
جـ	8	ب
د	7	ب
هـ	5	أ
و	12	جـ، د
ز	12	و
ح	13	هـ
ط	2	ز، ح

المطلوب:

1- رسم الشبكة الممثلة لهذا المشروع.

2- تحديد المسار الحرج.

3- ما هو الوقت المتوقع لإنهاء المشروع.

س8: إحدى شركات تمديد الأسلاك الكهربائية للمنازل مهتمة بالوقت الذي تصرفه لإكمال التمديدات وفقا للمعلومات التالية:

النشاط	الوقت المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم	النشاط الذي يسبق
أ	2	6	8	
ب	2	4	4	
جـ	1	2	3	
د	6	7	8	جـ
هـ	2	4	6	ب، د
و	6	10	14	أ، هـ
ز	1	2	4	أ، هـ
ح	3	6	9	و
ط	10	11	12	ز
ي	14	16	20	د
ك	2	8	10	ح، ط

المطلوب: تحديد الوقت المتوقع والمتباين لكل نشاط.

س9: يعمل المدير الإداري لإحدى الشركات على تصميم برنامج يمكن أو يساعد عملائه في إيجاد الوظائف المناسبة، بعض الأنشطة تتضمن تحضير السيرة الذاتية، كتابة الرسائل، تحديد مقابلات مع الجهات المتوقع العمل بها، البحث عن الشركات والصناعات التي يوجد لديها فرص وهكذا...

وفيما يلي يأتي المعلومات المتعلقة بهذا البرنامج:

النشاط	الوقت بالأيام			النشاط السابق
	المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم	
أ	8	10	12	-
ب	6	7	9	-
جـ	3	3	4	-
د	10	20	30	أ
هـ	6	7	8	جـ
و	9	10	11	ب، د، هـ
ز	6	7	10	ب، د، هـ
ح	14	15	16	و
ط	10	11	13	و
ي	6	7	8	ز، ح
ك	4	7	8	ط، ي
ل	1	2	4	ز، ح

المطلوب:

1- رسم شبكة الممثلة لهذه المشكلة.

2- تحديد الوقت المتوقع والتباين لكل نشاط.

3- تحديد أبكر وقت للبدء، أبكر وقت للإنتهاء، آخر وقت للبدء، آخر وقت للإنتهاء، والوقت الفائض لكل نشاط.

4- تحديد المسار الحرج والوقت المتوقع لإنهاء المشروع.

5- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال 70 يوما؟

6- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال 80 يوما؟

7- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال 90 يوما؟

س10 : تفكر إحدى الشركات في فتح مكتب جديد لها وقد حددت الأنشطة الرئيسية المصاحبة لهذا المشروع وكذلك العلاقات بين هذه الأنشطة كما يأتي:

النشاط	التسلسل أو الاعتمادية	الوقت اللازم للنشاط
أ	–	5
ب	–	2
جـ	أ	3
د	أ	4
هـ	د	2
و	ب	4
ز	جـ، هـ، و	6

المطلوب:

رسم الشبكة الممثلة لهذا المشروع وتحديد المسار الحرج وطوله.

س11 : المعلومات الآتية تمثل الأنشطة المتعلقة بأحد المشاريع

النشاط	التسلسل أو الاعتماد	الوقت اللازم للنشاط
أ	–	3
ب	–	2
جـ	أ	2
د	أ	4
هـ	جـ	1
و	د	3
ز	ب	3
ح	ز	4
ط	هـ، و	5

المطلوب:

رسم الشبكة الممكنة للمشروع وتحديد المسار الحرج وبالتالي الوقت اللازم لإنهاء المشروع.

س12 : يحتوي أحد المشاريع على عشرة أنشطة وقد توزع لديك المعلومات الاتية:

النشاط	التسلسل أو الاعتماد	الوقت اللازم للنشاط
أ	–	10
ب	أ	5
جـ	أ	3
د	ب	2
هـ	جـ	15
و	د	10
ز	أ	5
ح	ب	4
ط	هـ، ز، ي	20
ي	و، ح	30

س13 : المعلومات الآتية تتعلق بأحد المشاريع

النشاط	التسلسل أو الاعتمادية	الوقت اللازم للنشاط بالأيام		
		المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم
أ	–	3	5	8
ب	أ	4	7	12
جـ	أ	6	10	15
د	ب	3	4	3
هـ	ب، جـ	5	7	11
و	د، هـ	2	3	5

المطلوب:

1- رسم الشبكة الممثلة لهذا المشروع.

2- احتساب أطوال المسارات وتحديد المسار الحرج.

3- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال ٥٢ يوما.

4- ما هو احتمال إنهاء المشروع بأكثر من ٥٢ يوما.

س14: توفرت لديك المعلومات الآتية والمتعلقة باحد المشاريع والذي يحتوي على 13 نشاطا.

النشاط	التسلسل	الوقت والكلفة (الوقت بالأشهر)			
		الاعتيادي	الكلفة	السريع	الكلفة
أ	–	2	250	1.5	300
ب	أ	4	620	3	750
جـ	ب	4	380	2.5	500
د	أ	4	220	3	280
هـ	جـ	5	900	4	1150
و	هـ	6	750	4.5	975
ز	هـ	3	180	3	180
ح	و	3	340	2	450
ط	د، و	3	200	2.5	300
ي	و، ز	5	700	3.5	950
ك	ح	2	75	1.5	125
ل	ي	3	160	2.5	240
م	ط، ك، ل	1	60	1	60

المطلوب:

1- رسم الشبكة الممثلة للمشروع.

2- احتساب أطوال المسارات وتحديد المسار الحرج.

3- افرض أن صاحب المشروع يريد إنهاءه بوقت يقل عن الوقت المحتسب في المطلب الثاني بمقدار شهرين، فما هي الأنشطة التي يجب تخفيض وقتها وما هي الكلفة المصاحبة.

س15 : لقد توفرت لديك المعلومات الآتية والمتعلقة باحد المشاريع.

النشاط	الوقت بالأسابيع			النشاط الذي يسبق
	المتفائل	الأكثر احتمالاً	المتشائم	
أ	0.5	1	2	لا شيء
ب	1	2	3	أ
جـ	1	3	5	أ
د	3	4	5	ب
هـ	2	3	4	جـ
و	3	5	7	جـ
ز	4	5	6	د، هـ
ح	6	7	8	و
ط	2	4	6	ز، ح
ي	5	6	8	ز، ح
ك	1	2	3	ط
ل	3	5	4	ي

المطلوب:

1- رسم الشبكة الممثلة لهذا المشروع.

2- تحديد المسار الحرج.

3- ما هو احتمال إنهاء المشروع خلال 30 يوماً؟

حالة تطبيقية

شركة مقاولات لأغراض البناء متخصصة في بناء المساكن، المخازن وبنايات الشركات الصغيرة، يدير هذه الشركة شخصان كانا قد حضرا برنامجاً تدريبياً قبل عدة سنوات ثم مارسا العمل مع شركات مقاولات قبل أن يكونا شركتهما.

تقوم هذه الشركة بتقديم عروضها المتعلقة بالفرص المتاحة "بناء مساكن، مخازن أو مراكز أعمال أو شركات صغيرة، وعندما يرسو العطاء على الشركة فإنها تقوم بتوقيع عقود متعلقة بنواحي معينة في البناء (التمديدات الكهربائية، إمدادات الحجارة أو الآجر، التكلس، الدهان) وتقوم الشركة بكافة أعمال التجارة المطلوبة، وبالإضافة لذلك فإن إدارة الشركة تقوم بأعمال التخطيط والجدولة فيما يتعلق بكل عمليات البناء، وكذلك تضع الترتيبات المتعلقة بالتمويل قصير الأجل، وتراقب سير العمل على الأنشطة البنائية المختلفة.

إن الفلسفة التي تقوم عليها هذه الشركة هي " إن الوقت من ذهب" وعلى ذلك فإن التأخير في أعمال البناء سيؤدي إلى زيادة كلف التمويل المؤقت وإلى تأخير البدء في العمل على مشاريع أخرى، وبناءً على ذلك فإن الإدارة تعمل على التعامل وبشكل سريع في المشاكل المصاحبة لنقاط الاختناق، وتعمل بالتالي على تجنب التأخير في إنهاء المشروع قدر المستطاع، وتقليل الوقت المصروف على مشروع بناء معين، فإن الشركة تستخدم طريقة تقييم ومراجعة المشاريع Program Evaluation & Review Technique (PERT)، حيث تقوم الإدارة بتحديد الأنشطة المختلفة العلاقات بين هذه الأنشطة تقدير الوقت اللازم لكل نشاط، حيث بعدها يمكن إيجاد الوقت اللازم لكل نشاط، حيث بعدها يمكن إيجاد الوقت المتوقع لإنهاء العمل على نشاط معين ومن ثم احتساب العمل فيه على فعالية معنية وبدون تأخير لإنهاء المشروع ومن ثم احتساب الوقت الفائض، وبعدها الانتهاء من هذه الخطوات فإن الإدارة تستطيع توزيع مواردها مع اهتمام بالأنشطة الحرجة وذلك لكي تتمكن من تقليل الوقت اللازم لإنجاز المشروع.

افترض أن العطاء قد رسى على هذه الشركة لتنفيذ مشروع معين منزل مثلاً، وأن الأنشطة الواجب العمل عليها مع الأوقات المقدرة بالأيام هي كما يأتي:

	الأولوية	الوقت المقدر		
		المتفائل	الأكثر احتمالا	المتشائم
1- الترتيبات التمويلية (أ ب)	-	4	5	6
2- العقود الفرعية (ب جـ)	أ ب	2	5	8
3-حفر وصب الأساس (جـ د)	ب جـ	5	7	9
4- وضع الأعمدة (جـ هـ)	ب جـ	4	5	6
5- عمل الجدران (د و)	جـ د	2	4	6
6- صب السقف (و ز)	د و	3	5	9
7- التمديدات الكهربائية (و ح)	د و	4	5	6
8- تمديدات التدفئة المركزية (و ط)	د و	3	4	7
9- القصارة أو التكلس (و ي) 10- نصب الأبواب والنوافذ (ي ك)	د و و ي، هـ ي	5 10	7 11	9 12
11- البلاط (ك ل)	ي ك، ط ك ح ك، زك	4	6	8
12- القصارة الخارجية (م ك)	ي ك، ط ك	7	8	9
	د ك، ح ك			
13- الديكورات الداخلية (م ك)	ك م	4	5	10
14- عمل الممرات أمام وحول البناية (ل ش)	ك ل	5	7	9
15- الدهان (س ش)	ل س	5	6	7
16- تنظيف البلاط والتسليم (ش ص)	س ش، ن ش	2	3	4

المطلوب:

1- ما هو المسار الحرج وما أهمية هذا المسار؟

2- احتسب الوقت الذي يمكن تأخير إنهاء كل نشاط وبالتالي الوصول إلى حدث معين وبدون تأخير إنهاء المشروع؟

3- افرض أن المشروع قد بدأ العمل عليه في 8/1 ما هو احتمال إنهاء هذا المشروع في 9/30 ؟

تطبيقات في البرمجة

```
*****************
*               *
*  PERT ANALYSIS *
*               *
*****************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

ACTIVITY	IMMEDIATE PREDECESSOR	EXPECTED TIME
A	-	4
B	A	6
C	A	5
D	A	9
E	B	8
F	B, C	2
G	E	5
H	F, I	6
I	D	4
J	G, H	2

OUTPUT: DETERMINISTIC, LETTERED ACTIVTIES CTIVITIES& PRE-DECESSORS,

ACT	EARLY START	LATE START	EARLY FINISH	LATE FINISH	SLACK (LS-ES)	CRITICAL PATH
A	0.0	0.0	4.0	4.0	0.0	YES
B	4.0	4.0	10.0	10.0	0.0	YES
C	4.0	10.0	9.0	15.0	6.0	
D	4.0	15.0	13.0	24.0	11.0	
E	10.0	10.0	18.0	18.0	0.0	YES
F	10.0	15.0	12.0	17.0	5.0	
G	18.0	18.0	23.0	23.0	0.0	YES
H	12.0	17.0	18.0	23.0	5.0	
I	13.0	13.0	17.0	17.0	0.0	YES
J	23.0	23.0	28.0	28.0	0.0	YES

MULTIPLE CRITICAL PATHS

NETWORK COMPLETION TIME= 28

```
******************
*                *
*  PERT ANALYSIS *
*                *
******************
```

HERE IS WHAT YOU ENTERED:

ACTIVITY	IMMEDIATE PREDECESSOR	OPTIMISTICS	MOST LIKELY TIME	PISSIMIST TIME
A	-	1	2	3
B	A	1	3	5
C	A	2	3	10
D	B	2	5	8
E	D	1	2	3
F	C	1	1	1
G	C	1	1	1
H	G	1	3	5
I	F, C, E	2	4	6
J	E, I	1	5	9

OUTPUT: DETERMINISTIC, LETTERED ACTIVTIES CTIVITIES& PRE-DECESSORS,

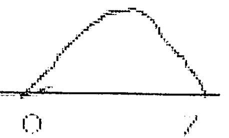
ACTIVITY	IMMEDIATE PREDECESSORS	EXPECTED (T)	VAR
A	-	2.00	0.11
B	A	3.00	0.44
C	A	4.00	1.78
D	B	5.00	1.00
E	D	2.00	.011
F	C	1.00	0.00
G	C	1.00	0.00
H	G	3.00	0.44
I	F,C ,E	4.00	0.44
J	E, I	5.00	1.78

ACT	EARLY START	LATE START	EARLY FINISH	LATE FINISH	SLACK (LS-ES)	CRITICAL PATH
A	0.0	0.0	2.0	2.0	0.0	YES
B	2.0	2.0	5.0	5.0	0.0	YES
C	2.0	7.0	6.0	11.0	5.0	
D	5.0	5.0	10.0	10.0	0.0	YES
E	10.0	10.0	12.0	12.0	0.0	YES
F	6.0	11.0	7.0	12.0	5.0	
G	6.0	17.0	7.0	18.0	11.0	
H	7.0	18.0	1.0	21.0	11.0	
I	12.0	12.0	16.0	16.0	0.0	YES
J	16.0	16.0	21.0	21.0	0.0	YES

MULTIPLE CRITICAL PATHS

NETWORK COMPLETION TIME= 21

Appendix



APPENDIX TABLE A

Areas of a Standard Normal Distribution*

An entry in the table is the proportion under the entire curve which is between z=0 and a positive value of Z. Areas for negative values of Z are obtained by symmetry.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0891	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2703	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4982	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

*Sours: Paul G. Hoel, Elementary Statistics, 2nd edition, (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966)P. 329.



الفصل الثامن

نظرية المباريات (الألعاب) Game Theory

1-8 مقدمة:

تتكون عملية اتخاذ القرارات بشكل عام من متخذ قرار تتوفر لديه مجموعة من البدائل أو الاستراتيجيات يفاضل بينها اعتمادا على نتائج تختلف درجة تحقيقها باختلاف ظروف اتخاذ القرار أو ما يسمى بحالات الطبيعة.

هناك حالات يكون بها أكثر من متخذ قرار يتوفر لكل منهم مجموعة من الاستراتيجيات والنتائج المختلفة لاستراتيجيات الطرف الآخر، أي أن استراتيجيات كل طرف تكون حالات طبيعة للطرف الآخر هذا الوضع التنافسي الذي يعتمد على المبادرات وردود الأفعال يشبه مجريات الألعاب أو المباريات، لذلك سمي هذا الأسلوب في اتخاذ القرارات بنظرية المباريات أو الألعاب.

بالرغم من الصعوبات المتعلقة باتخاذ القرارات بموجب هذا الأسلوب، إلا أن مجالات تطبيقه متعددة خاصة في ظروف منافسة، فالسياسات التسويقية والإدارية والمالية التي تتبعها المؤسسات لا يمكن أن توضع دون دراسة للسياسات التي تتبعها المؤسسات المنافسة.

إضافة لذلك، يمكن تطبيق هذا الأسلوب في العمليات العسكرية والألعاب الرياضية وأي وضع يتخذ به قرار على أساس تنافسي.

يركز هذا الفصل على بعض أساسيات نظرية المباريات من حيث أهميتها، استخدامها، صيغها، افتراضاتها، وأنواعها.

أما الأنواع المعطاة في هذا الفصل فهي الألعاب الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات الواضحة والمختلطة، والألعاب غير الصفرية، والألعاب غير الثنائية.

2-8 الأهمية والاستخدامات:

تكمن أهمية هذا الأسلوب في كونه أداة لاتخاذ القرارات في ظل ظروف تنافسية حيث يكون هناك أكثر من متخذ قرار غالباً ما تتعارض أهدافهم لذلك فإن كلفة عدم الدقة أو الخطأ ستكون مرتفعة خاصة وأن الموضوع يتعلق بالربح والخسارة في ظل موارد وأسواق محددة.

أما أهم مجالات استخدام هذا الأسلوب فتتمثل بما يلي:

- القرارات الاستثمارية.
- سياسات الترويج.
- سياسات التسعير.
- تطوير المنتجات.
- دخول أسواق جديدة.
- سياسات الرواتب والأجور وتضم الحوافز بشكل عام.
- سياسات التفاوض.
- العمليات العسكرية.
- الألعاب الرياضية.
- القرارات السياسية.

هذا إضافة إلى العديد من الحالات التي ينتج عن اتخاذ قرار بشأنها ردة فعل من طرف أو أطراف أخرى.

3-8 الصيغ والافتراضات:

إن نظرية المباريات، كأسلوب اتخاذ قرارات تفترض وجود العديد من الأطراف أو اللاعبين بشكل تنافسي لذلك فإن لها صيغاً عديدة تعتمد على عدد اللاعبين وكذلك على النتائج.

من حيث عدد اللاعبين، فقد تكون المباريات ثنائية أو متعددة أي غير ثنائية.

أما من حيث النتائج، فقد تكون صفرية، أي أن ما يكسبه أحد الأطراف يكون على حساب الطرف الآخر، لذلك تكون المحصلة صفراً، كما قد تكون المباريات غير صفرية، أي ليس بالضرورة ان يكون ربح أحد الأطراف ناتجاً بالكامل عن خسارة الطرف الأخر، يعني ذلك أن الوضع لن يكون تنافسياً تاماً إذ يمكن ان يكون هناك فرصة للتعاون واتخاذ قرار مناسب للطرفين.

أما أهم الافتراضات التي يعتمد عليها هذا الأسلوب بصيغة مختلفة فهي:

- يجب أن يكون هناك أكثر من متخذ قرار، إذ توجد أساليب للحالات الثنائية وأخرى لغير الثنائية.

- اتخاذ القرارات بشكل متزامن لأنها تكون على شكل أفعال وردودها حيث أن أي تأجيل في ردة الفعل قد يعطي للمبادر بالقرار فرصة للاستفادة التامة من نتائجه.

- وجود أهداف متضاربة تماماً أو نسبياً حتى تتحقق شروط المنافسة وبالتالي تطبيق هذا الأسلوب، إذ لم تكن الأهداف متعاكسة تماماً.

- التكرار وذلك حتى يتحقق مبدأ الأفعال وردودها، حيث أن لكل لاعب استراتيجيات يتخذها في ظل حالات الطبيعة المختلفة والتي هي عبارة عن استراتيجيات الطرف الآخر.

- كحالة اتخاذ قرار لا بد من أن تتوفر نتائج الاستراتيجيات في ظل الظروف المختلفة، ليعتمد عليها عند اتخاذ القرار.

4-8 أنواع المباريات:

أشرنا أن المباريات يمكن أن تصنف حسب عدد اللاعبين إلى ثنائية وغير ثنائية، وحسب النتائج إلى صفرية وغير صفرية، هذا إضافة إلى أن الاستراتيجيات قد تكون واضحة أو مختلطة.

فيما يلي توضيح لمعاني وأساليب حل هذه الحالات:

- **المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات الواضحة:**

كما توحي التسمية فإن هذه المباريات تشتمل على لاعبين في حالة منافسة تامة بحيث أن ربح أحدهما يعني خسارة الآخر.

أما بالنسبة لمفهوم الاستراتيجيات فتعني بأن كل لاعب يتبع نفس الاستراتيجيات بغض النظر عن الاستراتيجية التي يتبعها منافسه.

مثال رقم (1):

يمثل الجدول التالي نسبة الزيادة التي تحققها شركة معينة (ك) باتباع أسلوبي ترويج في ظل ردود فعل أو استراتيجيات شركة منافسة أخرى (ل) والمطلوب تحديد الاستراتيجية الأفضل لكل منها.

ك / ل	ب1	ب2
أ1	2	2
أ2	1	3

أساليب الحل:

أولا: الحل بواسطة أسلوب أقل الأعظم:

يعتمد هذا الاسلوب على افتراضين هما:

أ- تكون المبادرة دائماً من اليمين أي أن الشركة (ك) هي التي تبدأ بالمبادرة.

ب- حذر كل من الطرفين وسعيه إلى تقليل خسائره وبالتالي تقليل ربح الطرف الآخر، حيث أن كلاً من الطرفين قد يكون مدركاً لواقع الأمور.

خطوات الحل:

1- تحديد أسوأ نتيجة يمكن أن تحصل عليها الشركة الأولى في ظل استراتيجياتها، وأسوأ نتيجة هنا هي أقل نسبة زيادة في الحصة السوقية ومن ثم أفضل ذلك الأسوأ (Maximin)

2- تحديد أسوأ نتيجة يمكن أن تحصل عيلها الشركة الثانية وأسوأ نتيجة هنا هي أعلى خسارة ومن ثم اختيار أفضل الأسوأ. (Minimax)

أسوأ نتيجة للشركة الأولى	
أ1	2
أ2	1

أسوأ نتيجة للشركة الثانية	
ب1	2
ب2	3

ك \ ل	ب1	ب2		
أ1	2	2	2	Maximin
أ2	1	3	1	
Minimax	2	3		

تعني هذه النتيجة أن تختار الشركة الثانية استراتيجية ب١ إذا اختارت الأولى أ، لذلك تكون الحلول متوازية.

2- 2 = 0 (النتيجة الصفرية).

في حالة الاستراتيجيات الواضحة، لا بد أن تتساوى قيم أفضل الأسوأ أي(Maximin) للاعب الأول (Mimimax) للاعب الثاني.

ثانيا الحل عن طريق السيطرة:

يقصد بالسيطرة هنا أن تكون قيم إحدى الاستراتيجيات أفضل من غيرها وذلك بالنسبة للطرفين.

فمثلا لو أخذنا استراتيجيات الشركة الأولى، لوجدنا أن أ$_1$ افضل من أ$_2$، إذا اختارت الشركة الثانية ب$_1$، أما إذا اختارت الشركة الثانية ب$_2$، فإن أ$_2$ أفضل من أ$_1$.

لذلك لا نستطيع القول بأن أي من الاستراتيجيات (أ$_1$، أ$_2$) تسيطر على الأخرى أو أفضل منها.

- المقارنة بين استراتيجيات الشركة الأولى وتحديد أفضلها.
- المقارنة بين استراتيجيات الشركة الثانية وتحديد أفضلها، وذلك اعتمادا على نتيجة الخطوة السابقة.
- الاستمرار في الحل حتى نتوصل إلى نقطة التوازن أو الارتكاز أي القيمة التي تحقق نتيجة صفرية.

مقارنة أ$_1$ ، أ$_2$

أ$_1$: 2 2

أ$_1$: 1 3

نلاحظ عدم سيطرة أحداهما على الأهرى آخذين بالاعتبار هنا أن الرقم الأكبر هو الأفضل.

مقارنة ب$_1$، ب$_2$

بما أن القيم تمثل الخسارة للشركة الثانية، فإن المقارنة هنا تتم على أساس أن الرقم الأقل هو الأفضل.

لاحظ أن المقارنة هنا تكون بين الأعمدة.

ب$_1$		ب$_2$
2	$\longleftrightarrow$	2
1	$\longleftrightarrow$	3

2 تساوي 2

1 أفضل 3

إذا ب$_1$ أفضل من ب$_2$، لذلك نستبعد ب2 ونختصر المصفوفة لتكون

	ب$_1$
أ$_1$	2
أ$_2$	1

الآن نعود للمقارنة بين (أ$_1$ وأ$_2$)

بما أن أ$_1$ أعلى من أ$_2$، فإننا نستبعد أ$_2$ ونبقي أ$_1$ لتكون النتيجة النهائية

	ب$_1$
أ$_1$	2

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا.

ثالثاً: الحل بالطريقة الجبرية:

بالرغم من قلة استخدام هذا الأسلوب نظرا لصعوبته وعدم القدرة على تطبيقه لأكثر من استراتيجيتين للفريق الأول، فإننا سندرجه هنا بقصد التوضيح وزيادة الإلمام بمفهوم نظرية المباريات بشكل عام.

الخطوات

تعتمد هذه الطريقة على تفكير كل من اللاعبين بمساواة نتائج استراتيجياته بغض النظر عن استراتيجيات الطرف الآخر فمثلا تفكر الشركة الأولى بمساواة نتائج (أ$_1$، أ$_2$) فيما لو اتخذت الشركة الثانية من استراتيجياتها (ب$_1$، ب$_2$)، لذلك فإن خطوات هذه الطريقة تتلخص بما يلي:

- إيجاد الاحتمالات أو الأوزان التي تساوي نتائج استراتيجيات الطرف الأول.
- إيجاد الاحتمالات أو الأوزان التي تساوي نتائج استراتيجيات الطرف الثاني.
- استخدام الاحتمالات الموجودة لإيجاد قيمة المباراة.

لو فرضنا أن احتمال الاستراتيجية الأولى ($أ_1$) للشركة الأولى يساوي س، فهذا يعني أن احتمال الاستراتيجية الثانية يساوي 1− س.

كذلك لو افترضنا أن احتمال الاستراتيجية الأولى ($ب_1$) للشركة الثانية يساوي ص فإن احتمال الاستراتيجية الثانية ($ب_2$) يساوي 1− ص

			ص	1 − ص
			$ب_1$	$ب_2$
س	$أ_1$		2	2
1 − س	$أ_2$		1	3

مساواة نتائج استراتيجيات الشركة الأولى

س (2)+1 − س (1) = س (2) + 1 − س (3)

2 س + 1 − س = 2 س + 3 - 3 س

س + 1 = 3 − س

2 س= 2

1 − س = 0

مساواة نتائج استراتيجيات الشركة الثانية

ص (2)+1 − ص (2) = ص (1) + 1 − ص (3)

2 ص + 2 -2 ص = ص + 3 - 3 ص

2 = 3-2 ص

2 ص= 1

ص = $\frac{1}{2}$

1− ص = $\frac{1}{2}$

إيجاد قيمة المباراة

لاحظ هنا بأن إشارة مسائل التعظيم هي (≥) وإشارة مسائل التخفيض (≤).

الحل بالنسبة للشركة الثانية.

	1	1	0	0	
متغيرات	$ص_1$	$ص_2$	$ح_1$	$ح_2$	كميات
$ح_1$	2	2	1	0	1
$ح_2$	1	3	0	1	1
م	0	0	0	0	
ع − م	1	1	0	0	

	1	1	0	0	
متغيرات	$ص_1$	$ص_2$	$ح_1$	$ح_2$	كميات
$ح_1$	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$ص_2$	$\frac{1}{3}$	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
م	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	
ع − م	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	

متغيرات	ص$_1$	ص$_2$	ح$_1$	ح$_2$	كميات
	1	1	0	0	
ص$_1$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$
ص$_2$	0	3	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
م	1	0	$\frac{1}{2}$	0	
ع - م	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	

ص$_1$ = $\frac{1}{4}$ ، ص$_2$ = $\frac{1}{4}$

الحل بالنسبة للشركة الأولى:

ع	متغيرات	س$_1$	س$_2$	ح$_1$	ح$_2$	ص$_1$	ص$_2$	كميات
		1	1	0	0	2	2	
2	ص$_1$	2	1	1-	0	1	0	1
2	ص$_2$	2	3	0	1-	0	1	1
	م	8	8	2-	2-	2	2	
	ع - م	7	7	2-	2-	0	0	

* : ص هنا تعني متغيراً اصطناعياً وليست نسبة تحقيق استراتيجيات الشركة الثانية كما ورد في الحل السابق.

ع		1	1	0	0	2	2	
	متغيرات	$س_1$	$س_2$	$ح_1$	$ح_2$	$ص_1$	$ص_2$	كميات
2	$ص_1$	$\frac{4}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$س_2$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	م	$\frac{10}{3}$	1	-2	$\frac{1}{3}$	2	$-\frac{1}{3}$	
	ع − م	$\frac{7}{3}$	0	-2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	

ع		1	1	0	0	2	2	
	متغيرات	$س_1$	$س_2$	$ح_1$	$ح_2$	$ص_1$	$ص_2$	كميات
1	$ص_1$	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$س_2$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	م	1	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
	ع − م	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$	

إن مجموع نسب تحقيق استراتيجيات الشركتين يكون متساويا، أي أن مجموع

(Σ) س = مجموع (Σ) ص

Σ س $= \Sigma$ ص

Σ س = $س_1 + س_2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

Σ ص = $ص_1 + ص_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

الآن نجد نسبة كل منهما من المجموع العام

$س_1 = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$

$س_2 = 0 \div \frac{1}{2} = 0$

$ص_1 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$ص_1 \quad \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

نلاحظ بأن هذه هي نفس النسب التي حصلنا عليها سابقاً.

أما النتيجة النهائية، فيتم إيجادها بنفس الأسلوب السابق.

$1(2) + 0\ (1) = 2$

$1(2) + 0\ (3) = 2$

$\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}\ (2) = 2$

$\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}\ (3) = 2$

المباريات الثنائية الصفرية ذات الاستراتيجيات المختلطة:

ليس بالضرورة أن تكون جميع استراتيجيات المباريات الثنائية صفرية واضحة، إذ قد تكون هناك حالات ذات استراتيجيات مختلطة.

إن أفضل طريقة لمعرفة إذا كانت الاستراتيجيات واضحة أو مختلطة، أن نستخدم أسلوب أقل الأعظم، إذا تطابقت نتائج الطرفين، فإن ذلك يعني وجود استراتيجيات واضحة وإلا فالاستراتيجيات مختلطة.

مثال (2)

لو افترضنا أن النتائج الواردة في مثال (1) كانت كما يلي:

	$ب_1$	$ب_2$
$أ_1$	7	2
$أ_2$	1	4

أساليب الحل:

أولاً: أسلوب أقل الأعظم

	$ب_1$	$ب_2$	Maximin
$أ_1$	7	2	2
$أ_2$	1	4	1
Minimax	7	4	

نلاحظ هنا عدم وجود قيمة واحدة للمباراة حيث أن أعلى الأقل للشركة الأولى لا يساوي أقل الأعلى للشركة الثانية، لذلك لا بد أن تسعى كل شركة لتغيير استراتيجياتها وفقا لاستراتيجيات الشركة الأخرى، أي أن لا تبقى كل شركة ثابتة على استراتيجية واحدة.

يعني ذلك أن تقوم كل شركة بمزج استراتيجياتها بنسب معينة حتى تتحقق أفضل نتيجة ممكنة.

ثانياً: الحل عن طريق السيطرة.

	$ب_1$	$ب_2$
$أ_1$	7	2
$أ_2$	1	4

نقارن هنا قيم الاستراتيجيات حيث أن (7) أعلى من (1) ولكن (2) أقل من (4)، لذلك فإن استراتيجية ($أ_1$) ليست أفضل من ($أ_2$).

نقارن الآن $أ_2$ مع $أ_1$ (4) أكثر من (2)، لكن (1) أقل من (7)، مما يعني أن $أ_2$ لا تسيطر على $أ_1$.

بعد هذه الخطوة ننتقل لمارنة استراتيجيات الشركة الثانية.

بالنسبة للشركة الثانية

نتيجة عدم حدوث أي تغيير على المصفوفة، فإن عملية المقارنة تتم على المصفوفة الأصلية.

(1) أقل من (4) لكن (7) أكبر من (2)، لذلك فإن ب1 لا تسيطر على ب2.

(2) أقل من (7) لكن (4) أكبر من (1)، لذلك فإن ب2 لا تسيطر على ب1

نظراً لعدم وجود قيمة مشتركة بين الشركتين، فإن أسلوب السيطرة لم يوصلنا هنا إلى نتيجة.

ثالثاً : الحل بالطريقة الجبرية:

يساعدنا هذا الأسلوب في تحديد نسب استخدام الاستراتيجيات من قبل الشركات وذلك كما يلي:

س (7)+1 − س (1) = س (2) + 1 − س (4)

7 س + 1 − س = 2 س + 4 - 4 س

6س + 1 = 4-2 س

8 س= 3

$س = \frac{3}{8}$

$س = \frac{4 - 1}{4 + 1 - 2 - 7} = \frac{3}{8}$

ص (7)+1 − ص (2) = ص (1) + 1 − ص (4)

7 ص + 2 -2 س = ص + 4 - 4 ص

5 ص + 2 = 4 - 3 س

8 س= 2

س = $\frac{1}{4}$

س = $\frac{4 - 2}{7 - 2 - 1 + 4}$ = $\frac{1}{4}$

$\frac{3}{8}(7) + \frac{5}{8}(1) = \frac{26}{8}$

$\frac{3}{8}(2) + \frac{5}{8}(4) = \frac{26}{8}$

$\frac{1}{4}(7) + \frac{3}{4}(2) = \frac{13}{4}$

$\frac{1}{4}(1) + \frac{3}{4}(4) = \frac{13}{4}$

إذا قيمة المباراة = $\frac{13}{4}$ = 3.25

وذلك على افتراض نسب اللعب الواردة لكل من استراتيجيات الشركتين.

رابعاً: الحل بالطريقة المبسطة:

قيود استراتيجية الشركة الأولى

خفض $س_1 + س_2$

علماً بأن $7س_1 + س_2 \geq 1$

$2س_1 + س_2 \geq 1$

ع		1	1	0	0	2	2	
	متغيرات	س1	س2	ح1	ح2	ص1	ص2	كميات
2	ص1	7	1	1-	0	1	0	1
2	ص2	2	4	0	1-	0	1	1
	م	18	10	2-	2-	2	2	
	ع – م	17	9	2-	2-	0	0	

ع		1	1	0	0	2	2	
	متغيرات	س1	س2	ح1	ح2	ص1	ص2	كميات
2	ص1	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1-}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
1	س2	0	$\frac{26}{7}$	$\frac{2}{7}$	1-	$\frac{2-}{7}$	1	$\frac{5}{7}$
	م	1	$\frac{53}{7}$	$\frac{3}{7}$	2-	$\frac{3-}{7}$	2	
	ع – م	0	$\frac{46}{7}$	$\frac{3}{7}$	2-	$\frac{17-}{7}$	0	

ع		1	1	0	0	2	2	
	متغيرات	س1	س2	ح1	ح2	ص1	ص2	كميات
2	س1	1	0	$\frac{2-}{13}$		$\frac{2}{13}$		
1	س2	0	1	$\frac{1}{13}$		$\frac{1}{13}$		
	م	1	1	$\frac{1-}{13}$	$\frac{3-}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	
	ع – م	0	0	$\frac{1-}{13}$	$\frac{3-}{13}$	$\frac{25}{13}$	$\frac{23-}{13}$	

قيود الشركة الثانية

عظم ص$_1$ + ص$_2$

علماً بأن معادلة 7ص$_1$+2ص$_2$ ≤ 1

ص$_1$ + 4 ص$_2$ ≤ 1

ع	متغيرات	ص$_1$	ص$_2$	ح$_1$	ح$_2$	كميات
		1	1	0	0	
0	ح$_1$	7	2	1	0	1
0	ح$_2$	1	4	0	1	1
	م	0	0	0	0	
	ع − م	1	1	0	0	

ع	متغيرات	ص$_1$	ص$_2$	ح$_1$	ح$_2$	كميات
		1	1	0	0	
1	ص$_1$	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
0	ح$_2$	0	$\frac{26}{7}$	$\frac{-1}{7}$	1	$\frac{6}{7}$
	م	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	
	ع − م	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	

	متغيرات	$ص_1$	$ص_2$	$ح_1$	$ح_2$	كميات
		1	1	0	0	
1	$ص_1$	1	0	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$
1	$ص_2$	0	1	$\frac{1-}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{3}{13}$
	م	1	1	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{26}$	
	ع − م	0	0	$\frac{3-}{26}$	$\frac{3-}{26}$	

$$\Sigma س = \Sigma ص = \frac{4}{13}$$

$$ص_1 = \frac{1}{13} \div \frac{4}{13} = \frac{1}{4}$$

$$ص_2 = \frac{3}{13} \div \frac{4}{13} = \frac{3}{4}$$

$$س_1 = \frac{3}{26} \div \frac{8}{26} = \frac{3}{8}$$

$$س_2 = \frac{5}{26} \div \frac{8}{26} = \frac{5}{8}$$

أما قيمة المباراة، فهي نفس ما وجدناه في الطريقة السابقة.

مثال (3)

فيما يلي مصفوفة مباريات والمطلوب إيجاد الاستراتيجية أو الاستراتيجيات الأفضل لكل لاعب باستخدام أسلوبي أقل الأعظم والسيطرة.

	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$	
أ$_1$	2	2-	4	2-
أ$_2$	3-	5-	4-	5-
أ$_3$	1-	7-	4-	7-
	2	2-	4	

الحل بأسلوب أقل الأعظم

	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$	
أ$_1$	2	2-	4	2-
أ$_2$	3-	5-	4-	5-
أ$_3$	1-	7-	4-	7-
	2	2-	4	

الحل بأسلوب السيطرة.

اللاعب الأول:

أ$_1$ مع أ$_2$: جميع قيم أ$_1$ أعلى من قيم أ$_2$

أ$_1$ مع أ$_3$: جميع قيم أ$_1$ أعلى من قيم أ$_3$

لذلك فإن أ$_1$ هي الاستراتيجية المسيطرة

اللاعب الثاني:

	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$
أ$_1$	2	2-	4

لاحظ أن الأرقام الموجبة تعني خسارة اللاعب الثاني في حين تمثل ربحاً للأول. أما الأرقام السالبة، فهي ربح للثاني وخسارة للأول.

لذلك فإن (ب$_2$) هي أفضل استراتيجية للثاني حيث أنها تسيطر على (ب$_1$) وكذلك (ب$_2$).

لذلك تكون نتيجة المباراة

	ب1
أ1	-2

مثال (4)

فيما يلي مصفوفة مباريات ، والمطلوب تحديد الاستراتيجية أو الاستراتيجيات الأفضل باستخدام أسلوبي أقل الأعظم والسيطرة.

	ب1	ب2	ب3	ب4	ب5	
أ1	4	5	2	7	1	1
أ2	-2	1	3	2	5	-2
أ3	6	-4	4	2	5	-4
أ4	7	4	4	8	5	4
	7	5	4	8	9	

الحل بأسلوب أقل الأعظم

	ب1	ب2	ب3	ب4	ب5		
أ1	4	5	2	7	1	1	
أ2	-2	1	3	2	5	-2	
أ3	6	-4	4	2	5	-4	maximin
أ4	7	4	4	8	5	4	
	7	5	4	8	9		

minimax

الحل بأسلوب السيطرة:

(أ4) تسيطر على (أ1) حيث أن جميع قيمها أعلى من أن تساوي قيم (أ1)

(أ4) أيضاً تسيطر على (أ3) لنفس السبب

لذلك تصبح المصفوفة كما يلي:

	ب$_1$	ب$_2$	ب$_3$	ب$_4$	ب$_5$
أ$_1$	2-	1	3	2	9
أ$_2$	7	4	4	8	5

نبدأ الآن بمقارنة الاستراتيجيات الثانية (ب). وبما أنها تعني خسارة فإن القيم الأقل هي الأفضل.

ب2 أفضل من كل من (ب$_1$، ب$_3$، ب$_4$، ب$_5$)

لذلك تصبح المصفوفة بعد حذف كل هذا كما يلي

	ب2
أ4	4

أي أن قيمة المباراة (4) وهي ناتجة عن اختيار اللاعب الأول للاستراتيجية (أ$_4$) واللاعب الثاني للاستراتيجية (ب$_2$).

مثال (5)

حل المصفوفة التالية : باستخدام الأسلوب المناسب

	ب1	ب2	
أ$_1$	4	3 -	3-
أ$_2$	2	7	2
	4	7	

الحل بأسلوب السيطرة:

بالنسبة للاعب الأول، لا توجد استراتيجية أفضل من الأخرى، بالنسبة للاعب الثاني، لا توجد أيضاً استراتيجية أفضل من الأخرى. نتيجة عدم وجود قيمة مشتركة أو عدم وجود استراتيجية واضحة لذلك فإنه لا بد من التفكير بأساليب حل أخرى كالطريقتين الجبرية والمبسطة.

سوف نستخدم هنا الطريقة الجبرية لإيجاد نسب استخدام الاستراتيجيات من قبل اللاعبين.

س (4)+1 - س (2) = س (-3) + 1 - س (7)

4 س + 2 - 2س = 3 س + 7-7 س

2س + 2=7-10 س

12 س= 5

$$س = \frac{5}{12}$$

قيمة المباراة:

$$\frac{5}{12}(4) + \frac{7}{12}(2) = \frac{34}{12}$$

$$\frac{5}{12}(-3) + \frac{7}{12}(7) = \frac{34}{12}$$

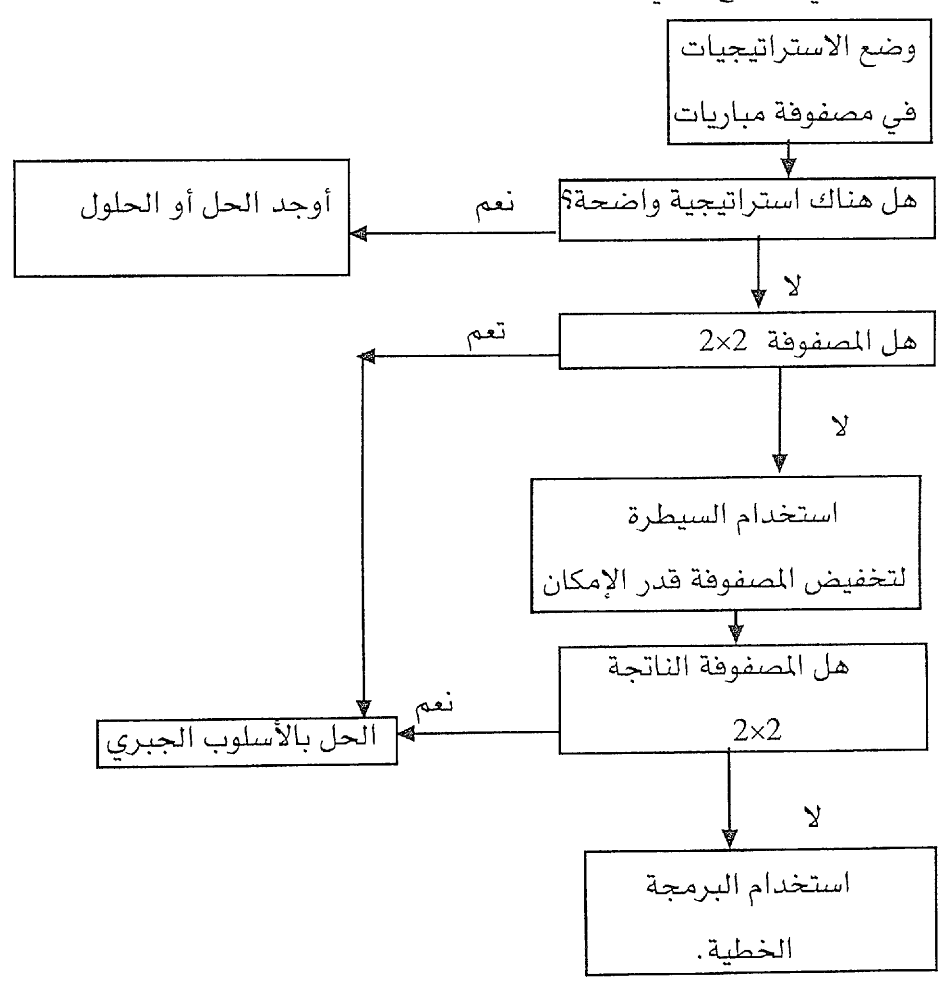
$$\frac{10}{12}(4) + \frac{2}{12}(-3) = \frac{34}{12}$$

$$\frac{10}{12}(2) + \frac{2}{12}(7) = \frac{34}{12}$$

ملاحظات:

- إذا كانت المبارة استراتيجيات واضحة، فإنه يمكن حلها باستخدام أي من الأساليب السابقة.
- إذا كانت ذاتا استراتيجيات مختلطة، أي لا توجد قيمة محددة للمباراة، فإنه يمكن حلها باستخدام الطريقة الجبرية أو الطريقة المبسطة تستخدم الطريقة الجبرية إذا كانت المصفوفة 2×2 أما الطريقة المبسطة فيمكن استخدامها لأي مصفوفة.
- إذا كانت كبيرة أي أكبر من 2×2، وذات استراتيجيات مختلطة فإنه يفضل تحويلها إلى مصفوفة 2×2 عن طريق السيطرة، إذا لم يكن ممكناً نستخدم الطريقة المبسطة للحل.

وفيما يلي توضيح بياني للملاحظات السابقة.



تعرضنا فيما سبق إلى حالات يمكن بها إيجاد قيمة واحدة للمباراة سواء كانت الاستراتيجيات واضحة أو مختلطة، في حالة الاستراتيجيات الواضحة رأينا أن هناك قيمة واحدة يربحا لاعب ويخسرها الآخر إذا لعب كل منها استراتيجية معينة.

أما في حالة الاستراتيجيات المختلطة فقد رأينا عدم وجود استراتيجية واحدة لكل لاعب، إذ يقوم كل منهم بمحاولة لعب كافة استراتيجيات عدداً من المرات من أجل تحسين نتيجته، لذلك لا بد من تحديد نسبة لعب كل استراتيجية بشكل يوازن بين نتائج استراتيجية اللاعبين حتى تكون المباراة صفرية.

هناك حالات يصعب معها إيجاد نتيجة صفرية، إذ ليس بالضرورة دائماً أن يكون ربح

أحد الطرفين مساوياً تماماً لخسارة الآخر، إذ يمكن أن يربح الطرفان أو يخسر الطرفان أو يربح أحدهما ويخسر الآخر ولكن بقيم مختلفة.

فمثلاً يمكن أن تقوم شركة بحملة ترويجية ترفع من حجم مبيعاتها ولكن ليس على حساب مبيعات الشركة الأخرى، أن تقوم شركتان بحملات ترويجية تنافسية لا تحقق لها شيئاً وأن تقوم شركة بحملة ترويجية ترفع من حجم مبيعاتها وتخفض من مبيعات الشركة المنافسة ولكن ليس بنفس المقدار.

مثال (6):

تنافس شركتان في سوق معينة وفقاً للافتراضات التالية:

- إذا قامت الشركتان بحملات ترويج بنفس الوقت، فلن تتغير حصصها السوقية مما ينتج عنه خسارة تكاليف الترويج التي تبالغ قيمتها للشركة الأولى 15,000 دينار والثانية 10,000 دينار.
- إذا قامت الشركة الأولى بإجراء حملتها دون أن تقوم الثانية بذلك، فإن هذه الشركة تتوقع أن تزداد مبيعاتها بقيمة 20,000 دينار مقابل انخفاض في مبيعات الشركة الثانية مقداره 10,000 دينار.
- إذا قامت الشركة الثانية بحملتها دون أن تقوم الأولى بذلك، فإن مبيعات هذه الشركة تزداد بمقدار 15,000 دينار مقابل انخفاض في مبيعات الشركة الأولى بمقدار 8,000 دينار.

فما الاستراتيجية الأنسب لكل شركة؟

- إذا لم تقم أي من الشركات بحملتها، فلن يحدث أي تغيير يمكن تلخيص الحالات السابقة بما يلي:

قيام الشركة بحملات ترويج

$أ_1$	$ب_1$
-15	-10

قيام الأولى وعدم قيام الثانية

$أ_2$	$ب_2$
20	10

قيام الثانية وعدم قيام الأولى

أ3	ب3
8-	15

عدم قيام الشركتين

أ4	ب4
0	0

بناء على ذلك نضع مصفوفة المباريات لكل شركة كالآتي:

الشركة الأولى

القيام بحملة	15-	20
عدم القيام بحملة	8-	0

الشركة الثانية

القيام بحملة	10-	15
عدم القيام بحملة	10-	0

حل المصفوفة الأولى بالسيطرة

العمود الثاني يسيطر على العمود الأول لنحصل على

25
0

الصف الأول أعلى من الثاني 20

إذا أفضل استراتيجية للشركة الأولى أن تعلن

حل المصفوفة الثانية بالسيطرة

العمود الثاني أفضل من العمود الأول

15
0

الصف الأول أفضل من الثاني 15

أيضاً أفضل استراتيجية للشركة الثانية أن تعلن

لكن إعلان الشركتين معاً يعني عدم تغير في مبيعاتها وبالتالي خسارة الأولى 15000 دينار وخسارة الثانية 10,000 دينار.

إن مثل هذه الحالات قد تستدعي التعاون والتنسيق وليس المنافسة، إلا إذا توفرت هناك معلومات كاملة لكل طرف عن ردود فعل أو استراتيجيات الطرف الآخر.

المباريات غير الثنائية:

توجد حالات تنافسية تشتمل على أكثر من طرفين يسعى كل منهم إلى تحقيق أفضل النتائج من خلال السيطرة على الأطراف الأخرى بمفرده، أو التحالف مع أحد او بعض الأطراف ضد الأطراف الأخرى وهكذا.

فمثلا لو كانت هناك ثلاث شركات متنافسة (أ، ب، جـ) فيمكن أن تقوم كل منها بوضع استراتيجيات بمفردها، أو تشكل تحالفات ثنائية تصل في عددها إلى $(2^{ن-1}-1)$ في هذه الحالة تكون التحالفات كما يلي: $(2^{3-1}-1) = 3$

أب، أجـ، ب جـ

كما يمكن أن تشكل الشركات الثلاثة نوعاً من التنسيق المشترك لتحقيق مصلحة مشتركة ضد جهة أخرى أو للتخفيض من الآثار السلبية للمنافسة بينهما.

أن عملية تحليل مثل هذه الحالات بالأساليب التي سبق توضيحها أمر على درجة الصعوبة إلا من خلال بعض برامج الحاسوب الخاصة وإجراء العديد من المحاولات أو التجارب بشكل يظهر أفضل استراتيجية لكل لاعب، حيث يمكن أن تكون هذه الاستراتيجيات نفسها متعارضة.

فمثلاً قد تكون أفضل استراتيجية للشركة (أ) أن تنسق مع (ب) وأفضل استراتيجية للشركة (ب) هو أن تنسق مع (جـ) وأفضل استراتيجية للشركة (جـ) أن تنسق مع (أ).

يعني ذلك انه لا تستطيع أي من الشركات تنفيذ أفضل استراتيجية لها لذلك قد تضطر جميعها لعدم المنافسة وربما التنسيق.

أسئلة:

1- ماذا نعني بالمباريات ذات الاستراتيجيات الواضحة؟

2- ماذا نعني بالمباريات ذات الاستراتيجيات المختلطة؟

3- ما أهم مبادئ أو خطوات الحل لكل من:

- أسلوب أقل الأعظم.
- أسلوب السيطرة.
- الأسلوب الجبري.
- الطريقة المبسطة.

تمارين:

1- أوجد قيمة المباريات المتمثلة بالمصفوفة التالية:

	ب1	ب2
أ1	4	-2
أ2	8	11

2- أوجد قيمة المباريات المتمثلة بالمصفوفة التالية:

	ب1	ب2
أ1	7	3
أ2	4	8

3- خفض المصفوفة التالية إلى أصغر حجم ممكن باستخدام أسلوب السيطرة:

	ب1	ب2	ب3	ب4
أ1	30	25	10	70
أ2	70	40	45	60
أ3	60	55	50	80
أ4	40	30	30	50

4- حل المصفوفة باستخدام البرمجة الخطية

	ب1	ب2
أ1	2	5
أ2	1	3
أ3	3	0

5-حل المصفوفة باستخدام البرمجة الجبرية

	ب1	ب2
أ1	4	3-
أ2	1-	5

6- تنافس مصرفان تجاريان في برامج الجوائز النقدية، فما هي الاستراتيجيات الأنسب لكل منها وفقا للافتراضات التالية:

- إذا قام الاثنان باعتماد البرامج فإن كلاً منهما يستحق زيادة في حجم ودائعه بمقدار (6%، 5%) على التوالي.

- إذا اعتمد الأول البرنامج لم يعتمد الثاني، فإنه سيحقق زيادة بنسبة 8% علماً بانها بالكامل على حساب ودائع البنك الثاني.

- إذا لم يعتمد الأول البرنامج في حين اعتمده الثاني، فإنه البنك الثاني سيحقق زيادة مقدارها 10% في حين يحقق الأول 2%.

المراجع

1-Anderson, D.R. Sweeney, DJ., and Williams, T.A. Qualitative Methods for Business, Minnesota; West Publishing Company, 1983.

2-Anderson, D.R., Sweeney, D.H. and Williams, T.A. Linear Programming for Decisions Making New York: West Publishing Co. 1974.

3-Buffa, E. S., and Dyer, J.S. Management Science Operations Research, New York: John Wiley and Sons, 1977.

4-Cobot, Victor A., and Harnett, Donald L., An Introduction to Management Science, Addison- Wesley Publishing Company. 1977,P. 14.

5-Charnes, A., and W.W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of Liner Programming, I an d II, N.Y., Wiley. 1961.

6-Dannenbring, D.B. and Starr, M.K. Management Science: An Introduction: New York: McGraw Hill, 1981.

7-Dantzing, G.B., Linear Programming and Extensions Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1968.

8-Dinkel, J. J., Kochenberger, G. A., and Plane, D.R., Management Sciences: Text and Applications. Homewood, Illinois: Irwin, Inc. 1978.

9-Eck, Roger D., Operations Research for Business Woods worth Publishing Company, Inc. 1976.

10-Eppen, G. D., and Gould, F.J., Quantitative Concepts for Management: Decisions Making Without Algorithms Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1979.

11-Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. Introduction to Operations Research, San Francisco, California: Holden-Day Inc., 1969.

12-Hillier, F. S. and Lieberman, G. J., Introduction to Management Science,

San Francisco, California: Holden Day Inc. 1980.

13-Joshi, M. Management Science: A Survey of Quantitative Decision Making Techniques, Belmont, California: Wadsworth Inc., 1980.

14-Levin, R.I., Kirkpatrick, C.A., & Rubin, D.s., Quantitative Approaches to Management New York: McGraw Hill Inc,. 1971.

15-Levin, R.I., Kirkpatrick, C., Quantitative Approaches to Management New York: McGraw Hill Inc. 1982.

16-Markland, R. E., Topics in Management Science. New York: John Wiley and Sons, 1979.

17-Paik, C.M. Quantitative Methods for Managerial Decisions New York: McGraw Hill, 1973.

18-Render, B. and Stair, Jr. R. M. Quantitative Analysis for Management Newton, Massachusetts: Allyn and Bacon Inc., 1985

19-Shamblin, J.E., Stevens. Jr., G.T., Operation Research: A Fundamental Approach. New York: McGraw Hill, Inc,. 1974.

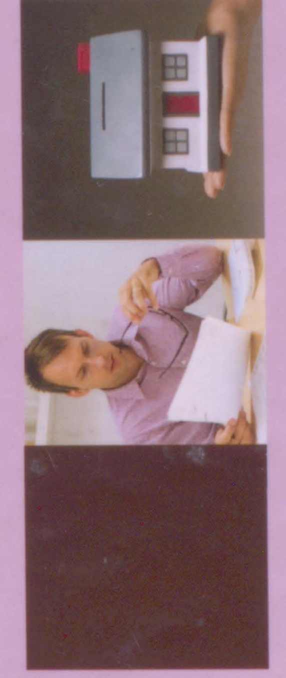
20-Taylor, B. W., Introduction to Management Science, Dubuque, Texas: Brown Company Publishers, 1982.

21-Turban, E., and Meredith, J.R. Fundamentals of Management Science Plane, Texas: Business Publications Inc. 1985.

22-Vatter, P.A., Bradley S.P., Frey, Jr. S.C., and Jackson 9n, B. B. Quantitative Methods in Management: Text and Cases. Homewood, Illinois: Irwin. Inc., 1978.

23-Wagner H.M. Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice -Hall, Inc., 1969

Operation



مقدمة في

بحوث العمليات

